[illegible] இயற்கைக்
கணிதம்

ஒருபடி இயல்முறைக் கணிதம்

[LINEAR ALGEBRA]

ஏ. கோவிந்தராஜுலு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—698

ஒருபடி இயல்முறைக் கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்
ஏ. கோவிந்தராஜுலு, எம்.எஸ்சி., பி.எட்.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
கடலூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—March, 1976

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 698

LINEAR ALGEBRA For B.Sc.,

A. GOVINDARAJULU

Price Rs. 8-00

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by
Nathan & Company,
Main Road, Velacheri,
Madras—600 042

பதிப்புரை

ஒருபடி இயல்முறைக் கணிதம் என்ற இந் நூல், தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 698ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 733 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்.

பொருளடக்கம்

1. அடிப்படைக் கொள்கைகள்

(Basic Concepts)

1-1. கணங்கள் (Sets)

நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு அல்லது இனம் ஒரு கணம் எனப்படும். நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இனம் எனின், எந்த ஒரு குறிப் பிட்டுள்ள பொருளும் அந்த இனத்தில் உண்டு அல்லது இல்லை என்பதை நம்மால் தெளிவாகக் கூறமுடியும்.

ஒரு கணத்திலுள்ள பொருள்கள் அதன் மூலகங்கள் (elements) எனப்படும். அப் பொருள்கள் எவையாகவேனும் இருக்கலாம். $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ என்ற பெரிய எழுத்து களினல் கணங்களையும், $a, b, c, \ldots, x, y, z$ என்ற சிறிய எழுத்துகளினல் அதன் மூலகங்களையும் குறியீடு செய்வது மரபு.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$

A கணம் ஆங்கில எழுத்துகளில் உயிர் எழுத்துகள் a, e, i, o, u கொண்ட கணமாகும்.

(ii) $S = \{x : x$ ஓர் ஒற்றை முழு எண்$\}$

S கணம் அனைத்து ஒற்றை எண்கள் கொண்ட கணமாகும்.

1-2. முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட கணம் முடிவுற்ற கணமெனவும் (Finite Set), அவ்வாறற்ற கணம் முடிவிலிக் கணம் (Infinite Set) எனவும் கூறப்படும்.

ஒரே ஒரு மூலகம்கொண்ட கணம் ஒருமைக்கணம் (Singleton) எனப்படும். $\{o\}$ என்ற ஒரு கணம் ஒருமைக் கணமாகும்.

மூலகமற்ற ஒரு கணம் பூச்சியக் கணம் எனப்படும். இது ϕ எனக் குறிப்பிடப்படும். $\{\phi\}$ என்பது பூச்சியக் கணத்தைக் கொண்ட ஒரு கணமாதலின், ϕ-ம், $\{\phi\}$-ம் வெவ்வேறானவை.

1-3. கீழ்க் கணங்கள் (Sub–sets)

A எனும் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் B கணத்திலுமிருப்பின், கணம் A கணம் B-ன் கீழ்க்கணம் எனப்படும். இது $A \subseteq B$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $A = \{1, 3, 7\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ எனின்,
$A \subset B$ அல்லது $B \supset A$.

(ii) $A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{3, 5, 1\}$ எனின்,
$A \subseteq B$, மேலும் $A = B$.
$\therefore A \subseteq A$.

1-4. அடிப்படைக் கணச் செய்கைகள் (Fundamental set operations)

(1) கணங்களின் ஒன்றிணைப்பு

A, B என்பவை இரு கணங்களெனின், அவற்றின் ஒன்றிணைப்பு $A \cup B$ எனக் குறிப்பிடப்படும். $A \cup B$ என்பது A, B இரண்டிலும் உள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட கணமாகும்.

குறியீட்டின்படி,

$$A \cup B = \{x : x \in A, \text{ அல்லது } x \in B\}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $A = \{a, b, c\}$
$B = \{b, d, e\}$ எனின்,
$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

(ii) $A = \{x : x$ ஒரு கூட்டு முழு எண்$\}$
$B = \{y : y$ ஒரு குறை முழு எண்$\}$
$A \cup B = \{z : z,$ பூச்சியமற்ற ஒரு முழு எண்$\}$

(iii) $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{2, 3, 4\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

(2) கணங்களின் வெட்டு (Intersection of sets)

A, B என்ற இரு கணங்களது வெட்டு $A \cap B$ எனக் குறிப்பிடப்படும். $A \cap B$ என்பது A, B கணங்களது பொது மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணமாகும்.

குறியீட்டின்படி,

$$A \cap B = \{x : x \in A, \quad x \in B\}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i)
$$A = \{a, b, c, d, e\}$$
$$B = \{c, d, e, f, g\} \text{ எனின்,}$$
$$A \cap B = \{c, d, e\}$$

(ii)
$$A = \{x : x \text{ ஓர் ஒற்றை எண்}\}$$
$$B = \{y : y \text{ ஓர் இரட்டை எண்}\} \text{ எனின்,}$$
$$A \cap B = \{z : z \text{ ஓர் ஒற்றை எண், } z \text{ ஓர் இரட்டை எண்}\}$$
$$= \phi \text{ பூச்சியக் கணம்.}$$

(3) கணங்களின் வேறுபாடு (Difference of sets)

A, B என்ற இரு கணங்களின் வேறுபாடு $(A - B)$ என்று குறிப்பிடப்படும். $(A - B)$ என்பது B-ல் இல்லாத, ஆனால், A-ல் மட்டும் உள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட கணமாகும்.

குறியீட்டின்படி,

$$A - B = \{x : x \in A, \quad x \notin B\}$$
$$B - A = \{y : y \in B, \quad y \notin A\}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i)
$$A = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{3, 6\} \text{ எனின்,}$$
$$A - B = \{4, 5\}$$

(ii)
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$$
$$B = \{4, 5, c, d\} \text{ எனின்,}$$
$$A - B = \{1, 2, 3, a, b\}$$
$$B - A = \{c, d\}.$$

(4) ஒரு கண நிரப்பி (Complement of a set)

பொதுவான கணம் (Universal set) U ஒன்றின் கீழ்க்கணம் A எனில், A-ன் நிரப்பி $U - A$ எனும் கணமாகும். இது A'

எனக் குறிப்பிடப்படும். A' என்ற கணம் A-ல் இல்லாத, ஆனால் U-ல் மட்டும் இருக்கின்ற மூலகங்கள் கொண்டதாகும்.

குறியீட்டின்படி,

$$A' = U - A = \{x : x \in U,\ x \notin A\}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

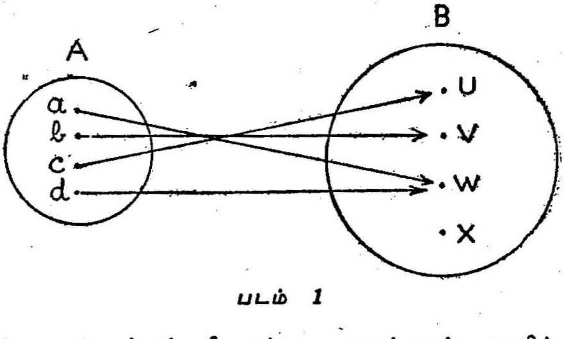
(i) $U = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{a, b\}$ எனின்,
$A' = U - A = \{c, d, e\}$

(ii) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ எனின்,
$A' = U - A = \{2, 4, 6, \ldots\}$

குறிப்பு : (a) $A \cup A' = U$, (b) $A \cap A' = \phi$, (c) $U' = \phi$.

1-5. உருமாற்றம் (Mapping)

A, B என்பவை இரு கணங்களெனவும் A-யிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் B-யிலுள்ள ஒரு மூலகத்துடன் ஒரே முறையில் தொடர்புபடுத்தும் சில விதிகள் உள்ளன எனவும் கொள்வோம். இவ்வாறு A கணத்தை B கணத்துடன் தொடர்புபடுத்தும் முறையை உருமாற்றம் என்றும், குறிப்பாக உள் உருமாற்றம் (into mapping) என்றும் கூறுவோம்.



படம் 1

இவ் வுருமாற்றம் f என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்பட்டு, $: A \rightarrow B$ என்றோ அல்லது $A \rightarrow B$ என்றோ எழுதப்படும். மேலும், α என்பது A-யிலுள்ள ஒரு மூலகமாயின், மூலகம் α-வோடு உருமாற்றம் f தொடர்புபடுத்தும் B-யிலுள்ள மூலகம் $f(\alpha)$ என்று குறிக்கப்படும். $f(\alpha)$, α-ன் f-விம்பம் (f-image) எனப்படும்.

படத்தில் $a, d \in A$ மூலகங்கள் $w \in B$ மூலகத்துடனும், $b \in A$ மூலகம் $v \in B$ மூலகத்துடனும், $c \in A$ மூலகம் $u \in B$ மூலகத்துடனும் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. அதாவது,

$$w = f(a), \quad v = f(b),$$
$$u = f(c), \quad w = f(d).$$

A கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் B கணத்தின் ஒத்த மூலகங்களது முந்தைய விம்பங்கள் (Pre-images) எனப்படும்.

1-6. மேல் உருமாற்றம் (Onto Mapping)

B கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் A கணத்தில் உள்ள மூலகங்களுடன் தொடர்புற்றிருப்பின், அவ்வகை உருமாற்றம் மேல் உருமாற்றம் (Onto mapping) எனப்படும்.

1-7. ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் (One to one map)

உருமாற்றம் $f : A \rightarrow B$ என்பது, A கணத்திலுள்ள வெவ்வேறு மூலகங்களுக்கு வெவ்வேறு விம்பங்கள் B–ல் இருக்குமாறு அமைந்தால், ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் எனப்படும்.

1-8. அநேக ஒன்று உருமாற்றம் (Many-one mapping)

B கணத்திலுள்ள மூலகங்களில் குறைந்தது ஒன்றிற்காவது A கணத்திலுள்ள மூலகங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மூலகங்களுடன் தொடர்புள்ள உருமாற்றம் அநேக ஒன்று உள் உருமாற்றம் (Many-one into mapping) எனப்படும்.

B கணத்திலுள்ள மூலகங்களில் குறைந்தது ஒன்றிற்காவது A-யிலுள்ள மூலகங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மூலகங்களுடன் தொடர்பிருந்து, B-ல் உள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் A-ன் f–விம்பங்களாக இருப்பின், அவ்வகை உருமாற்றம் அநேக ஒன்று மேல் உருமாற்றம் (Many-one onto mapping) எனப்படும்.

1-9. நேர்மாறான உருமாற்றம் (Inverse mapping)

$f : A \rightarrow B$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம் எனக் கொள்வோம். எனவே, B–யிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரே ஒரு மூலகம் A–ல் இருக்கும். ஆகவே, B–யிலுள்ள y என்ற ஒவ்வொரு மூலகமும் A–ல் உள்ள அதன் முந்தைய விம்பம் x மீது உருமாற்றப்படுகிறது எனக்கொண்டு, B-லிருந்து

A-க்கு உருமாற்றம் செய்யலாம். இவ்வகை உருமாற்றம் f-ன் நேர்மாறுன உருமாற்றம் எனப்பட்டு f^{-1} எனக் குறியிடப் படும்.

குறியீட்டின்படி,

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad x \in A, \quad y \in B.$$

1-10 குலங்கள் (Groups)

பின்வரும் விதிகள் பொருந்தும், $\circ$ என்ற ஓர் இணைச் சேர்க்கை (Operation) கொண்ட வெறுமையற்ற கணம் G ஒரு குலம் எனப்படும்.

(i) $x \circ y \in G, \forall\, x, y \in G$

(ii) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \forall\, x, y, z \in G$ (சேர்ப்பு விதி-Associative law)

(iii) G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் x-க்கும் சர்வசம மூலகம் (Identity element) எனப்படும் e எனும் மூலகம் $x \circ e = e \circ x = x$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்க வேண்டும்.

(iv) நேர்மாறு மூலகம் (Inverse element) இருக்கவேண்டும். அதாவது, G-ல் உள்ள x எனும் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $x^{-1} \in G$ என்ற ஒரு மூலகம்

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கவேண்டும்.

மேற்குறிப்பிட்ட விதிகளுடன் ஒரு குலத்திலுள்ள மூலகங் களுக்குப் பரிமாற்று விதி (Commutative law) பொருந்துமெனின், அக் குலம் அபெலியன் குலம் (Abelian group) எனப்படும். அதாவது, அபெலியன் குலத்தில்,

$$x \circ y = y \circ x, \quad \forall\, x, y \in G.$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $G = \{1, -1, i, -i\}$ **என்பது பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின்கீழ் ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் (Abelian) குலம் என நிறுவுக.**

கணம் G-ல் ஒரு குலத்துக்கான விதிகள் அனைத்தும் பொருந் தும் என முதலில் நிறுவுவோம்.

(i) இணைச்சேர்க்கை

$$1(1) = 1 \in G$$
$$1 \cdot i = i \in G$$
$$1(-i) = -i \in G$$
$$(-1)(-i) = i \in G$$
$$(i)(-i) = -i^2 = 1 \in G$$

எனவே பெருக்கல் கணம், G-ல் ஓர் இணைச்சேர்க்கை ஆகும்.

(ii) சேர்ப்பு விதி

$$(-1 \cdot i) \cdot (-i) = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$$
$$(-1) \cdot (+i \cdot -i) = -1 \cdot (-i^2) = -1 \cdot 1 = -1$$
$$\therefore (-1 \cdot i) \cdot -i = -1 \cdot (i \cdot -i)$$

இது அனைத்து மூலகங்களுக்கும் பொருந்துமாதலின், சேர்ப்பு விதி கணம் G-க்குப் பொருந்தும்.

(iii) சர்வசம மூலகம்

கணம் G-ல் சர்வசம மூலகம் 1 ஆகும்.

ஏனெனின், $1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1, i \in G$

$1 \cdot (-i) = (-i) \cdot 1 = -i, \quad 1, -i \in G$

$1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1, \quad 1, -1 \in G$

$1 \cdot (1) = (1) \cdot 1 = 1, \quad 1 \in G$

(iv) நேர்மாறு மூலகம்

$1, -1, i, -i$ ஆகிய மூலகங்களது நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே $1, -1, -i, i$ ஆகும். அதாவது, ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் G-ல் உண்டு.

எனவே, G ஒரு குலமாகும்.

மீண்டும்,

$$i \cdot (-i) = (-i) \cdot i = -i \in G$$
$$1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = 1 \in G \text{ முதலியன.}$$

குலம் G-ல் பரிமாற்று விதியும் பொருந்துவதால் அது அபெலியன் குலமாகும். மேலும், குலம் G-ல் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 4. ஆதலின், குலம் G ஒரு முடிவுற்ற அபெலியன் குலமாகும்.

2. அனைத்து முழு எண்களது கணம் I, கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின்கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

எனக் கொள்வோம்.

(i) இணைச்சேர்க்கை

இரு முழு எண்களது பெருக்கம் ஒரு முழு எண்.

$\therefore \; a \circ b \in I \;\; \forall \;\; a, b \in I$

(ii) சேர்ப்பு விதி

முழு எண்கள் கூட்டலுக்குச் சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

$$\therefore \; (a + b) + c = a + (b + c), \forall \; a, b, c, \in I$$

(iii) சர்வசம மூலகம்

தொகுதி I-ல் உள்ள 0 சர்வசம மூலகமாகும். ஏனெனில்,

$$a + 0 = 0 + a = a, \; \forall \; a \in I$$

(iv) நேர்மாறு மூலகம்

தொகுதி I-ல் உள்ள a என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $-a \in I$ என்ற மூலகம்

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உண்டு.

$-a$ என்பது a-ன் நேர்மாறு மூலகம் எனப்படும்.

(v) பரிமாற்று விதி

முழு எண்கள் கூட்டலுக்குப் பரிமாற்று விதி பொருந்தும்.

$$\therefore \; a + b = b + a, \;\; \forall \; a, b \in I$$

ஒரு குலத்தின் அனைத்து விதிகளும் தொகுதி I-க்குப் பொருந்துமாதலின், I என்பது கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலமாகும். மேலும், பரிமாற்று விதியும் பொருந்துவதால் I ஒரு முடிவில்லாத அபெலியன் குலம்.

1-11. களம் (Field)

ஒரு வெறுமையற்ற கணம் F-ல் பின்வரும் விதிகள் பொருந்துமெனின், அது ஒரு களம் எனப்படும்.

(1) $(F, +)$ ஓர் அபெலியன் குலம்.

(அ-து) (i) $a, b \in F \Rightarrow a + b \in F$

(ii) $a + b = b + a, \forall a, b \in F$

(iii) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c, \in F$

(iv) பூச்சிய மூலகம் எனப்படும் 0 என்ற மூலகம்
$a + 0 = 0 + a, \forall a \in F$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருந்தும், $0 \in F$ஆகவும் இருக்கும்.

(v) F-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் a-க்கும், $-a \in F$ என்ற மூலகம்

$$a + (-a) = -a + a = 0, \forall a \in F$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உண்டு.

(2) $(F^*, .)$ ஓர் அபெலியன் குலம். (இங்கு $F^* = \{x \in F; x \neq 0\}$)

(அ-து) (i) $a, b, \in F^* \Rightarrow a . b \in F^*$

(ii) $a . b = b . a, \forall a, b, \in F^*$

(iii) $a . (b . c) = (a . b) . c, \forall a, b, c \in F^*$

(iv) ஒருமை மூலகம் (Unity element) எனப்படும் 1 என்ற மூலகம்

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in F^*$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருப்பதோடு, $1 \in F$ ஆகவும் இருக்கும்.

(v) F^*-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் a-க்கும், $a^{-1} \in F^*$ என்ற ஒரே முறை மூலகம் (unique element)

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1}. a = 1, \forall a \in F^*$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உண்டு.

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \forall a, b, c \in F$

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம்.

(2) அனைத்து சிக்கலெண்களது கணம்.

இவை முறையே $(R, +, \cdot)$, $(C, +, \cdot)$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

(3) அனைத்து முழு எண்களது கணம் ஒரு களம் அன்று. ஏனெனின், ஒன்று என்ற எண்ணைத் தவிர, மற்றப் பூச்சியமில்

எண்களுக்குப் பெருக்கல் இணைச்சேர்க்கையின்கீழ் நேர்மாறு மூலகம் கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டாக, 2 என்ற எண்ணின் பெருக்கல் நேர் மாறு மூலகம் $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ஒரு முழு எண் அன்று.

(4) $a + b\sqrt{2}$ வடிவிலுள்ள அனைத்து மெய்யெண்கள் ஒரு களம் என நிறுவுக. (a, b இரண்டும் விகிதமுறு எண்கள்).

$a + b\sqrt{2}$ வடிவிலுள்ள அனைத்து மெய்யெண்களது கணம் S என்க.

1. $(S, +)$ ஓர் அபெலியன் குலம் என முதலில் நிறுவுவோம்.

(i) இணைச்சேர்க்கை

$A = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $B = a_2 + b_2\sqrt{2}$ என்பவை S-ன் யாதேனும் இரு மூலகங்கள் என்க.

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \\ &= P + Q\sqrt{2} \in S. \qquad P = a_1 + a_2 \\ & \qquad\qquad\qquad\quad Q = b_1 + b_2. \end{aligned}$$

(ii) பரிமாற்று விதி

$$\begin{aligned} A+B &= (a_1+a_2) + (b_1+b_2)\sqrt{2} \\ &= (a_2+a_1) + (b_2+b_1)\sqrt{2} \\ &= (a_2+b_2\sqrt{2}) + (a_1+b_1\sqrt{2}) \\ &= B+A \end{aligned}$$

(iii) சேர்ப்பு விதி

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= [(a_1+a_2) + (b_1+b_2)\sqrt{2}] + (a_3+b_3\sqrt{2}) \\ &= [(a_1+a_2)+a_3] + [b_1+b_2)+b_3]\sqrt{2} \\ &= [a_1+(a_2+a_3)] + [b_1+(b_2+b_3)]\sqrt{2} \\ &= (a_1+b_1\sqrt{2}) + [(a_2+a_3) + (b_2+b_3)\sqrt{2}] \\ &= (a_1+b_1\sqrt{2}) + [(a_2+b_2\sqrt{2}) + (a_3+b_3\sqrt{2})] \\ &= A+(B+C) \end{aligned}$$

(iv) சர்வசம மூலகம்

$0 = 0 + 0\sqrt{2} \in S$ ஆதலின் S-ல் சர்வசம மூலகம் 0 உள்ளது.

(v) நேர்மாறு மூலகம்

$a_1 + b_1\sqrt{2}$ என்ற S-ல் உள்ள மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகம் $-a_1 - b_1\sqrt{2} \in S$.

$$\because \quad (a_1+b_1\sqrt{2}) + (-a_1-b_1\sqrt{2})$$
$$= (a_1-a_1) + (b_1-b_1)\sqrt{2}$$
$$= 0+0\sqrt{2} = 0$$

எனவே, S-ல் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு.

எனவே, $(S, +)$ ஓர் அபெலியன் குலம்.

2. அடுத்து, $S^* = \{x \in S;\ x \neq 0\}$ எனின், $(S^*, .)$ ஓர் அபெலியன் குலம் என நிறுவுவோம்.

(i) இணைச்சேர்க்கை

$A = a_1+b_1\sqrt{2},\ B = a_2+b_2\sqrt{2} \in S^*$ எனின்,

$$A \cdot B = (a_1+b_1\sqrt{2})\ (a_2+b_2\sqrt{2})$$
$$= (a_1a_2+2b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$$
$$= L+M\sqrt{2} \in S^*, \quad L=a_1a_2+2b_1b_2$$
$$M=a_1b_2+a_2b_1$$

(ii) பரிமாற்று விதி

$$A \cdot B = (a_1a_2+2b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$$
$$B \cdot A = (a_2a_1+2b_2b_1) + (b_2a_1+b_1a_2)\sqrt{2}$$
$$= (a_1a_2+2b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$$
$$= A \cdot B$$

(அ-து) $A \cdot B = B \cdot A$

(iii) சேர்ப்பு விதி

$C = a_3+b_3\sqrt{2}$ எனின்,

$$A \cdot (B \cdot C) = (a_1+b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2+b_2\sqrt{2}) \cdot (a_3+b_3\sqrt{2})]$$
$$= (a_1+b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2a_3+2b_2b_3) + (a_2b_3+a_3b_2)\sqrt{2}]$$
$$= [a_1(a_2a_3+2b_2b_3) + 2b_1(a_2b_3+a_3b_2)]$$
$$+ [a_1(a_2b_3+a_3b_2) + b_1(a_2a_3+2b_2b_3)]\sqrt{2}$$
$$= (a_1a_2a_3+2a_1b_2b_3+2a_2b_1b_3+2a_3b_1b_2)$$
$$+ (a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1+2b_1b_2b_3)\sqrt{2}$$

$$
\begin{aligned}
(A \cdot B) \cdot C &= [(a_1a_2+2b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}] \cdot (a_3+b_3\sqrt{2}) \\
&= (a_1a_2a_3+2a_3b_1b_2+2a_1b_2b_3+2a_2b_1b_3) \\
&\quad + (a_1a_2b_3+2b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1)\sqrt{2} \\
&= (a_1a_2a_3+2a_1b_2b_3+2a_2b_1b_3+2a_3b_1b_2) \\
&\quad + (a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1+2b_1b_2b_3)\sqrt{2} \\
&= A \cdot (B \cdot C)
\end{aligned}
$$

(iv) சர்வசம மூலகம்

S^*-ல் சர்வசம மூலகம் 1.

$\because 1 = 1+0\sqrt{2} \in S^*$.

(v) நேர்மாறு மூலகம்

$(a_1+b_1\sqrt{2}) \in S^*$ மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகம் $\dfrac{1}{a_1+b_1\sqrt{2}}$

$$\because (a_1+b_1\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{(a_1+b_1\sqrt{2})} = 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_1+b_1\sqrt{2}} &= \frac{a_1-b_1\sqrt{2}}{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_1-b_1\sqrt{2})} = \frac{a_1-b_1\sqrt{2}}{a_1^2-2b_1^2} \\
&= \frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2} + \frac{-b_1}{a_1^2-2b_1^2}\sqrt{2} \\
&= P'+Q'\sqrt{2} \in S^*,\ P' = \frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2},\ Q' = \frac{-b_1}{a_1^2-2b_1^2}
\end{aligned}
$$

எனவே, S^*-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் S^*-ல் உண்டு.

எனவே, $(S^*, \cdot)$ ஓர் அபெலியன் குலம்.

3. மீண்டும்,

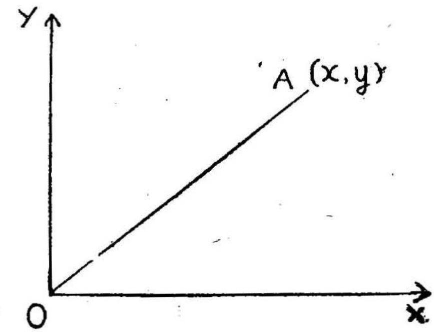
$$
\begin{aligned}
A \cdot (B+C) &= (a_1+b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2+b_2\sqrt{2}) + (a_3+b_3\sqrt{2})] \\
&= (a_1+b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2+a_3) + (b_2+b_3)\sqrt{2}] \\
&= [a_1(a_2+a_3) + 2b_1(b_2+b_3)] \\
&\quad + [b_1(a_2+a_3) + a_1(b_2+b_3)]\sqrt{2} \\
&= [(a_1a_2+2b_1b_2) + \sqrt{2}(b_1a_2+b_2a_1)] \\
&\quad + [(a_1a_3+2b_1b_3) + \sqrt{2}(b_1a_3+b_3a_1)] \\
&= (a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2}) + (a_1+b_1\sqrt{2})(a_3+b_3\sqrt{2}) \\
&= A \cdot B + A \cdot C
\end{aligned}
$$

இவ்வாறே, $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

ஒரு களத்தின் அனைத்து விதிகளும் S-க்குப் பொருந்துவதால் S ஒரு களமாகும்.

1-12. வெக்டர்கள் (Vectors)

அளவும் திசையும் கொண்டது ஒரு வெக்டர் (Vector) எனப்படும். ஒரு வெக்டர் கணியத்தைத் (Vector Quantity) திசை கொண்ட கோட்டுத் துண்டத்தினுல் குறிப்பிடலாம்.



படம் 2

படத்தில் $\overrightarrow{OA}$ ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும். அதன் அளவு OA கோட்டின் நீளம். OA ஒரு குறித்த திசையைக் கொடுக்கும்.

A புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனின்,

$$\text{வெக்டர் } \overrightarrow{OA} = xi + yj$$

இங்கு i, j என்பவை x, y திசைகளின் அலகு வெக்டர் களாகும்.

ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறிப்பிட வரிசைப்பட்ட ஒரு சோடி எண்களை (x_1, x_2) உபயோகிக்கின்ருேம். இங்கு வரிசைப்பட்ட அதே சோடி எண்கள் (x_1, x_2) ஒரு இருபரி மாண வெக்டரைக் குறிக்கும்.

ஒரு வரிசைப்பட்ட n எண்கள் $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n பரிமாண வெக்டர் எனப்படும். $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை மெய்யெண் களாகவோ சிக்கலெண்களாகவோ இருக்கக்கூடும். மேலும் அவை முறையே வெக்டரின் முதல், இரண்டாம், ..., nஆவது கூறு எனப்படும்.

1-13. பூச்சிய வெக்டர் (Zero vector)

தனது கூறுகள் அனைத்தும் பூச்சியமாகக் கொண்ட வெக்டர், பூச்சிய வெக்டர் எனப்படும். இது 0 எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) $(0, 0, \ldots, 0) = 0$

1-14. வெக்டரின் அடிப்படைச் செய்கைகள்

1. ஒரு வெக்டரின் எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar multiple) — வரையறை

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ எனவும் a ஓர் எண் எனவும் கொண்டால்,

$$aX = Xa = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

2. வெக்டர்களின் கூட்டல்

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

என்பவை இரு n பரிமாண வெக்டர்களெனின்,

$$\begin{aligned} X+Y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \end{aligned}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

$X = (3, 5, -2, 1)$, $Y = (2, 1, -1, 0)$ எனின்,

$$\begin{aligned} 3X+7Y &= 3(3, 5, -2, 1) + 7(2, 1, -1, 0) \\ &= (9, 15, -6, 3) + (14, 7, -7, 0) \\ &= (9+14, 15+7, -6-7, 3+0) \\ &= (23, 22, -13, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7X-2Y &= 7(3, 5, -2, 1) - 2(2, 1, -1, 0) \\ &= (21, 35, -14, 7) + (-4, -2, +2, 0) \\ &= (21-4, 35-2, -14+2, 7+0) \\ &= (17, 33, -12, 7) \end{aligned}$$

3. சில முடிவுகள்

(i) $1 \cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

(ii) $(-1) \cdot X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

(iii) $0 \cdot X = 0$

(iv) $a \cdot 0 = 0$

(v) $(ab)\, X = a(bX)$

(vi) $X + Y = Y + X$

(vii) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$

(viii) $a\,(X + Y) = aX + aY$

(ix) $(a+b)\, X = aX + bX$

(x) $X - X = 0$

(xi) $0 - X = -X$

(xii) $-(-X) = X$

(xiii) $X - Y = -(Y - X)$

(xiv) $X - Y = Z \Rightarrow X = Z + Y$

(xv) $(a - b)\, X = aX - bX$

இவை அனைத்தும் 1-14-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறைகளிலிருந்து பெறப்படும்.

1-15. எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar product), அளவு (modulus), தூரம்

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

என்பவை இரு n பரிமாண வெக்டர்கள் என்க.

X, Y இரு வெக்டர்களது எண்ணிப் பெருக்கி (Scalar product),

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

X வெக்டரது அளவு (modulus) $|X|$ எனக் குறியிடப்பட்டு

$$|X| = \sqrt{(X \cdot X)} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}$$

என வரையறுக்கப்படும்.

X, Y என்ற இரு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் $d\,(X,Y)$ எனக் குறிப்பிடப்பட்டு

$$d\,(X,Y) = \sqrt{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

X, Y என்ற இரு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ எனின்,

$$X \cdot Y = |X|\ |Y| \cos\theta \text{ ஆகும்.}$$

$X \cdot Y = 0$ எனின், $\theta = 90°$.

எனவே $X \cdot Y = 0$ எனின், அவ்விரு வெக்டர்களும் தம்முள் செங்குத்தானவையாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

$$X = (2, 3, 4, 5)$$
$$Y = (2, 0, 3, 1) \text{ எனின்,}$$

எண்ணிப் பெருக்கி
$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (2, 3, 4, 5) \cdot (2, 0, 3, 1) \\ &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \\ &= 4 + 0 + 12 + 5 \\ &= 21 \end{aligned}$$

அளவு
$$\begin{aligned} |X| &= \sqrt{\{2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\}} \\ &= \sqrt{\{4 + 9 + 16 + 25\}} \\ &= \sqrt{54} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

தூரம்
$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \sqrt{\{(2-2)^2 + (3-0)^2 + (4-3)^2 + (5-1)^2\}} \\ &= \sqrt{\{0^2 + 3^2 + 1^2 + 4^2\}} \\ &= \sqrt{\{0 + 9 + 1 + 16\}} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

2. அணிகள்

(Matrices)

2-1. அணி – வரையறை

m நிரைகள், n நிரல்கள், mn மூலகங்கள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வரிசை "$m \times n$" அணி எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = [a_{ij}]$$

A அணியில் m நிரைகளும் n நிரல்களும், mn மூலகங்களும் உள்ளன. மூலகம் ஒவ்வொன்றும் அணிமூலகம் (element of a matrix) எனப்படும். அணிமூலகங்கள் மெய்யெண்களாகவோ அல்லது சிக்கலெண்களாகவோ இருக்கக்கூடும். a_{ij} என்பது i வது நிரையில் j வது நிரலிலுள்ள மூலகமாகும். செவ்வக வரிசையைப் பகர அடைப்புகள் [ ] அல்லது பிறை அடைப்புகள் ( ) இட்டு ஓர் அணியைக் குறிப்பது மரபு. ஓர் அணிக்குப் பெருமானம் கிடையாது. a_{11}, a_{22}, ... a_{mn} என்பவை அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்களாகும் (Diagonal elements).

2-2. அணி வகைகள் (Kinds of matrices)

(i) நிரை அணி (Row matrix)

ஒரு நிரையும் n நிரல்களும் கொண்ட ஓர் அணி நிரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : $A = [1 \quad 9 \quad 11 \quad 7 \quad 3]_{1 \times 5}$ என்பது ஒரு 1×5 நிரை அணியாகும்.

(ii) நிரல் அணி (Column matrix)

m நிரைகளும் ஒரு நிரலும் கொண்ட ஓர் அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ என்பது ஒரு

3×1 நிரல் அணியாகும்.

(iii) முற்றும் பூச்சிய அணி (Null matrix)

ஒரு $m \times n$ அணியில் அதன் மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அது (m, n) தரமுடைய முற்றும் பூச்சிய அணி எனப்படும்.

(iv) சமமூலைவரை அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் அதன் மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்களைத் தவிர மற்றவை யாவும் பூச்சியமெனின், அது ஒரு சமமூலைவரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & o & o & \dots & o \\ o & a_{22} & o & \dots & o \\ o & o & a_{33} & & o \\ \dots\dots & & & & \dots\dots \\ \dots\dots & & & & \dots\dots \\ o & o & o & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

A என்ற $n \times n$ அணி (சதுர அணி)யில் அதன் மூலைவிட்டங்களில் உள்ள மூலகங்கள் $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{nn}$. ஏனைய மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமாகும். A அணி சமமூலைவரை அணி எனப்படும்.

(v) மூலைவரை அணி (Scalar matrix)

மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் சமமாக உள்ள ஒரு சமமூலைவரை அணி, மூலைவரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : $B = \begin{bmatrix} b & o & o & o \\ o & b & o & o \\ o & o & b & o \\ o & o & o & b \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ எனும் அணி

மூலைவரை அணியாகும்.

ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக்குச் சமமாகவும், மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகவுமிருப்பின் அது **அணி அலகு** (unit matrix) எனப்பட்டு I எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ என்பது}$$

தரம் n கொண்ட அணி அலகு.

(vi) உள் அணி (Sub-matrix)

A என்ற ஓர் அணியில் சில நிரைகளை அல்லது சில நிரல்களை அல்லது சில நிரல்களையும் நிரைகளையும் நீக்கிக் கிடைக்கப் பெறும் அணி A அணியின் உள்அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 5} \text{ என்ற அணியின்}$$

சில உள் அணிகள்:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

vii) முக்கோண அணிகள் (Triangular matrices)

ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திற்கு மேலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அது கீழ்முக்கோண அணி (Lower triangular matrix) எனவும், மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அது மேல்முக்கோண அணி (upper triangular matrix) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & & & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு கீழ்முக்கோண அணி எனப்படும்.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ o & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ o & o & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & & & & \ldots \\ \ldots & & & & \ldots \\ o & o & o & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு மேல்முக்கோண அணியாகும்.

(viii) சமச்சீரணி (Symmetric matrix)

$[a_{ij}]$ என்ற ஒரு சதுர அணியில் $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ எனின், அது ஒரு சமச்சீரணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

இதில் $a_{11} = 7$, $a_{22} = 6$, ...

$a_{12} = a_{21} = 4$; $a_{13} = a_{31} = 5$, ..., $a_{34} = a_{43} = 7$, ...

(ix) எதிர்ச்சீரணி (Skew Symmetric matrix)

$A = [a_{ij}]$ எனும் ஒரு சதுர அணியில் $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ எனின், அது ஓர் எதிர்ச்சீரணி எனப்படும்.

$a_{ij} = -a_{ji}$ ஆதலின், எதிர்ச் சீரணியில் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமாகும்.

$$(\because\ a_{ii} = -a_{ii},\quad \therefore\ 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0.)$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

என்பது ஓர் எதிர்ச் சீரணியாகும்.

2-3. அணிக்கோவை (Determinant)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \ldots \\ \ldots & & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

என்பது ஒரு சதுர அணி எனின்,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

என்பது A அணியின் அணிக்கோவை எனப்படும். இது $|A|$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

2-4. ஒரு களத்தின் மீதமைந்த அணி (Matrix over a Field)

ஓர் அணி A-ன் அனைத்து மூலகங்களும் ஒரே களம் F-ல் உள்ளதெனின், A அணி F களத்தின் மீதமைந்த அணி எனப்படும்.

F களம் மெய்யெண் களம் R எனின் A அணி மெய்யணி (Real matrix) என்வும், சிக்கலெண்களைக் கொண்ட களம் C எனின் A அணி சிக்கலணி (Complex matrix) எனவும் கூறப்படும்.

2-5. சம அணிகள் (Equal matrices)

இரு அணிகளது தரமும் ஒத்த மூலகங்களும் சமமெனின், அவை சம அணிகள் எனப்படும்.

(அ-து) $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ என்ற அணிகளில் ஒவ்வொன்றினது தரமும் $m \times n$ எனவும்,

$$a_{ij} = b_{ij} \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots\ldots, m \\ j=1, 2, \ldots\ldots, n \end{pmatrix} \text{ எனவும்}$$

இருப்பின், $A = B$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A = B$ ஆகும்.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனின், $A \neq B$.

2-6. சரிநிகர் தொடர்பு (Equivalence relation)

1. யாதானுமொரு அணி A, $A=A$ என்றவாறு இருப்பின், அது பிரதிபலிக்கும் தன்மை (Reflexive property) எனப்படும்.

2. A, B என்ற யாதாமிரு அணிகளில் $A=B$ என்பது $B=A$ எனின் அது சமச்சீர் தன்மை (Symmetric property) எனப்படும்.

3. A, B, C என்பவை யாதாவது மூன்று அணிகள். $A=B$, $B=C$ எனின் $A=C$ என்றால், அது கடத்தும் தன்மை (Transitive property) எனப்படும்.

எனவே, அணிகளது சமத்தன்மை ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும்.

2-7. ஓர் அணியின் எண்ணி பெருக்கி (Scalar multiple of a matrix)

$$A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$$

அணி, λ ஒரு எண்ணி (திசையிலி) எனவும் கொள்வோம். λ ஒரு சிக்கலெண்ணகவோ அல்லது மெய்யெண்ணகவோ இருக்கக் கூடும். பின்,

$$\lambda A = [\, \lambda\, a_{ij} \,] \text{ என வரையறுக்கப்படும்.}$$

(அ-து) அணி A-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் λ-ஆல் பெருக்கிப் பெறும் அணி λA ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

$$5A = \begin{bmatrix} 5a_{11} & 5a_{12} & 5a_{13} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \\ 5a_{41} & 5a_{42} & 5a_{43} \end{bmatrix} \text{ என்றாகும்.}$$

2-8. அணிகளது கூட்டல் (Matrix addition)

இரு அணிகளில் நிரை, நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமமெனின், ஒத்த மூலகங்களது கூட்டுத் தொகையைத் தனது மூலகங்களாகக் கொண்ட மூன்றாவது அணி முதல் இரு அணிகளது கூட்டலாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

1. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ எனின்,

$$A+B = [a_{ij}]+[b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

$$A-B = [a_{ij}]-[b_{ij}] = [a_{ij}]+[-b_{ij}] = [a_{ij}-b_{ij}].$$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ எனின்,

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 7+3 & 4+0 \\ 1+0 & 2+1 & 5+3 & 3+2 \\ 3+1 & 4+2 & 2+1 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 & 7-3 & 4-0 \\ 1-0 & 2-1 & 5-3 & 3-2 \\ 3-1 & 4-2 & 2-1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-9. கூட்டல் நியதிகள் (Laws of addition)

$$A = [a_{ij}],\quad B = [b_{ij}],\quad C = [c_{ij}]$$

என்பவை அனைத்தும் $m\times n$ அணிகள் என்க.

(i) பரிமாற்று விதி (Commutative law)

$$\begin{aligned} A+B &= [a_{ij}]+[b_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}] && \text{(கூட்டல் விதிப்படி)} \\ &= [b_{ij}+a_{ij}] && \text{(F-களம் பரிமாற்றுவிதிக்குட்பட்டது)} \\ &= [b_{ij}]+[a_{ij}] \\ &= B+A. \end{aligned}$$

$$\therefore\ A+B = B+A.$$

(ii) சேர்ப்பு விதி (Associative law)

$$\begin{aligned} A+(B+C) &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\ &= (A+B)+C. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A+(B+C) = (A+B)+C.$$

(iii) பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

λ ஒரு திசையிலி (எண்ணி) எனின்,

$$\begin{aligned} \lambda\,(A+B) &= \lambda\,[(a_{ij})+(b_{ij})] \\ &= \lambda\,[a_{ij}+b_{ij}] \\ &= [\lambda\, a_{ij}+\lambda\, b_{ij}] \\ &= [\lambda\, a_{ij}]+[\lambda\, b_{ij}] \\ &= \lambda\, A+\lambda\, B. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lambda\,(A+B) = \lambda\, A+\lambda\, B.$$

(iv) நேரெதிர் அணி (Additive Inverse)

$$\begin{aligned} A+(-1)A &= [a_{ij}]+(-1)\,[a_{ij}] \\ &= [a_{ij}]+[-a_{ij}] \\ &= [a_{ij}-a_{ij}] \\ &= [o] \end{aligned}$$

$(-1)\,A$ என்பது A-ன் நேரெதிர் கூட்டுஅணி எனப்படும்.

(v) முற்றொருமை அணி (Identity matrix)

$$\begin{aligned} A+0 &= [a_{ij}]+[0_{ij}] \\ &= [a_{ij}+0_{ij}] \\ &= [a_{ij}] = A. \end{aligned}$$

$O = [o_{ij}]$ என்ற முற்றும் பூச்சிய அணி முற்றொருமை அணி (Identity Matrix) எனப்படும்.

2-10. தேற்றம்

$X + A = B$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $X = B - A$ என்ற ஒரேமுறைத் தீர்வு (unique solution) உண்டு.

(A, B ஒரே வகை அணிகளாகும்.)

நிருபணம்

முதல் $X+A = B$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டு என நிறுவுவோம்.

சமன்பாடு: $X+A = B$.

இதில் $X = B - A$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\begin{aligned}(B-A)+A &= \{B+(-A)\}+A \\ &= B + [-A+A] \quad (\text{சேர்ப்பு விதி}) \\ &= B+O \qquad (-A,\ A\text{-ன் நேரெதிர் அணி}) \\ &= B.\end{aligned}$$

$\therefore$ $X = B - A$ என்ற ஒரு தீர்வு $X+A = B$-க்கு உண்டு.

இனி இத் தீர்வு ஒரேமுறைத் தீர்வு என நிறுவுவோம். இச் சமன்பாட்டிற்கு வேறொரு தீர்வு Y என்போம்.

பின் சமன்பாடு $Y + A = B$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad X + A = B$$
$$Y + A = B.$$

எனவே, $X + \not{A} = Y + \not{A}$

$$\therefore \quad X = Y.$$

எனவே, $X=B-A$ என்ற தீர்வு ஒரேமுறைத் தீர்வு ஆகும்.

2-11. தேற்றம்

F என்ற ஒரு களத்திலுள்ள அனைத்து $m \times n$ அணிகளது கணம் கூட்டல் விதிக்குட்பட்ட ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

நிரூபணம்

பரிமாற்றுக்குழுவுக்கான விதிகள்

(i) $x \circ y \in G \quad \forall\ x, y \in G$

(ii) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \forall\ x, y, z \in G.$

(iii) $e \circ x = x, \quad \forall\ x \in G.$
e என்பது சர்வசம மூலகமாகும்.

(iv) $x^{-1} \circ x = e, \quad \forall\ x \in G.$
x^{-1} என்பது x-ன் நேர்மாறு மூலகம்.

(v) $x \circ y = y \circ x, \quad \forall\ x, y, \in G.$

இனி $m \times n$ அணிகளது கணம் S-க்கு மேற்கூறிய விதிகள் பொருந்துமெனின், S ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

(i) A, B என்பவை $m \times n$ அணிகளெனின், $A + B$யும் ஒரு $m \times n$ அணியாகும். $\therefore$ விதி (i) பொருந்தும்.

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ என நாம் முன்னர் கண்டோம். $\therefore$ விதி (ii) பொருந்தும்.

(iii) $[0]_{m\times n}$ என்பது F-ல் அமைந்த பூச்சிய அணி என்க.

$\therefore \ [0]_{m\times n}+[a_{ij}]_{m\times n} = [0+a_{ij}] = [a_{ij}]_{m\times n}$

(அ-து) $0+A = A, \ \forall \ A \in S.$

$[0]_{m\times n}$ சர்வசம மூலகம். $\therefore$ விதி (iii) பொருந்தும்.

(iv) $A = [a_{ij}]$ எனின், $-A = [-a_{ij}]$ என நாம் அறிவோம்.

$\therefore \ -A+A$

$= [-a_{ij}]+[a_{ij}] = [-a_{ij}+a_{ij}] = [0]$

(அ-து) $-A+A = 0$

இவ்வாறே, $A - A = 0$

$\therefore$ விதி (iv) பொருந்தும்.

(v) $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

$= B + A, \ \forall \ A, B \in S.$

$\therefore$ விதி (v)-ம் பொருந்தும்.

எனவே, F களத்தின் மீதமைந்துள்ள அனைத்து $m\times n$ அணி களும் ஒரு பரிமாற்றுக்குழவாகும்.

2-12. அணிகளது பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகளில் Aஅணியிலுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை B அணியிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமெனின், அவ்விரு அணிகளும் பெருக்கப்படக்கூடும்.

A-ன் i-வது நிரை, B-ன், j-வது நிரல் இவற்றின் உட் பெருக்குத்தொகையை தனது ij-வது உறுப்பாகக் கொண்ட அணி C ஆனது முறையே A, B அணிகளது பெருக்கல் எனப்படும்.

இது $C = AB$ எனக் குறிப்பிடப்படும். A, B அணிகளது அணித்தரங்கள் முறையே $m\times n$, $n\times p$ எனின், C-ன் அணித்தரம் $m\times p$ ஆகும்.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$B = [b_{ij}]_{n\times p}$ எனின்,

$C = [c_{ij}]_{m\times p}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

மேலும் $C = AB$-ல் A என்பது முன்காரணி (Pre-factor) எனவும் B என்பது பின்காரணி (Post-factor) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$ எனின்,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 \\ R_3 C_1 & R_3 C_2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$R_1 C_1 = [1\ 2\ 3\ 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1(2)+2(3)+3(1)+1(2) = 2+6+3+2 = 13$$

$$R_1 C_2 = [1\ 2\ 3\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1(1)+2(2)+3(1)+1(3) = 1+4+3+3 = 11$$

$$R_2 C_1 = [4\ 5\ 6\ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4(2)+5(3)+6(1)+2(2) = 8+15+6+4 = 33$$

$$R_2 C_2 = [4\ 5\ 6\ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 4(1)+5(2)+6(1)+2(3) = 4+10+6+6 = 26$$

$$R_3 C_1 = [2\ 1\ 3\ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(2)+1(3)+3(1)+3(2)$$
$$= 4+3+3+6 = 16$$

$$R_3 C_2 = [2\ 1\ 3\ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(1)+1(2)+3(1)+3(3)$$
$$= 2+2+3+9 = 16.$$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 \\ R_3 C_1 & R_3 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 33 & 26 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$$

மாதிரி – 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

எனின், $A^2 - B = I$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$A^2 = A \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+0+0 & 0+0+1 & 1+0+3 \\ 0+0+0 & 0+4+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+2+3 & 0+0+9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$A^2 - B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$\therefore \quad A^2 - B = I$$

2-13. பெருக்கல் நியதிகள்

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times p}, \quad C = [c_{ij}]_{p\times q}$$

எனின், AB, BC, $A(BC)$, $(AB)C$ முதலிய பெருக்கங்கள் உண்டு.

(i) சேர்ப்பு விதி (Associative law)

$$BC = [b_{ij}]_{n\times p}\ [c_{ij}]_{p\times q} = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{ik}\ c_{kj}\right]$$

$$\therefore A(BC) = [a_{ij}]\ [\sum b_{ik}\ c_{kj}]$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{rk}\ c_{kj}\right)\right],\ j = 1, 2, \ldots, q$$

$$= \sum a_{ir}\ (b_{r1}\ c_{1j} + b_{r2}\ c_{2j} + \ldots + b_{rp}\ c_{pj})$$

$$= a_{i1}\ (b_{11}\ c_{1j} + b_{12}\ c_{2j} + \ldots + b_{1p}\ c_{pj})$$
$$+ a_{i2}\ (b_{21}\ c_{1j} + b_{22}\ c_{2j} + \ldots + b_{2p}\ c_{pj})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{in}\ (b_{n1}\ c_{1j} + b_{n2}\ c_{2j} + \ldots + b_{np}\ c_{pj})$$

$$= (a_{i1}\ b_{11} + a_{i2}\ b_{21} + \ldots + a_{in}\ b_{n1})\ c_{1j}$$
$$+ (a_{i1}\ b_{12} + a_{i2}\ b_{22} + \ldots + a_{in}\ b_{n2})\ c_{2j}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_{i1}\ b_{1p} + a_{i2}\ b_{2p} + \ldots + a_{in}\ b_{np})\ c_{pj}$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{r1}\right) c_{ij} + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{r2}\right) c_{2j} + \ldots + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{rp}\right) c_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{1}^{n} a_{ir}\ b_{rk}\right) c_{kj}$$

$$\therefore A(BC) = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{rk}\right) c_{kj}\right]_{m\times q}.$$

இவ்வாறே,

$$AB = [a_{ij}]\ [b_{ij}] = \left[\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{rk}\right]_{m\times p}$$

$$(AB)C = \left[\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{rk}\right)\sum_{k=1}^{p} c_{kj}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{rk}\right)\right]_{m\times q}$$

$$\therefore A(BC) = (AB)C.$$

(ii) பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

$$A(B+C) = [a_{ij}]\ \{[b_{ij}] + [c_{ij}]\}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ (b_{kj}+c_{kj})\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ c_{kj}\right]$$

$$= AB + AC.$$

$$\therefore\ A(B+C) = AB+AC.$$

இவ்வாறே, $(B+C)A = BA+CA.$

(iii) மாற்று விதி (Commutative law)

$$A = [a_{ij}]_{m\times n},\ B = [b_{ij}]_{n\times p}$$

எனின், A யிலுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B யிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாதலின் AB பெருக்கம் உண்டு. ஆனால், B யிலுள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் A யிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமல்லவாதலின் BA பெருக்கம் கிடையாது.

மீண்டும், BA பெருக்கம் உண்டெனினும், AB யும் BA யும் சமமாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

$$\therefore\ AB \neq BA.$$

எனவே, மாற்றுவிதி அணி பெருக்கலுக்குப் பொருந்தாது.

மேலும் $AB = O$ எனின், A - யோ B - யோ O ஆக இருக்கத் தேவையில்லை.

மீண்டும், $A \neq O,\ AB = AC \not\Rightarrow B = C.$

மாதிரி – 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ என்க.

இங்கு $A \neq 0,\ B \neq 0.$

ஆனால், $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

(அ-து) $A \neq O,\ B \neq O$ ஆனால் $AB = O.$

மாதிரி — 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$ எனின்,

$AB \neq BA$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+1(2)+3(3) & 2(2)+1(5)+3(1) & 2(3)+1(2)+3(1) \\ 3(1)+2(2)+1(3) & 3(2)+2(5)+1(1) & 3(3)+2(2)+1(1) \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2+9 & 4+5+3 & 6+2+3 \\ 3+4+3 & 6+10+1 & 9+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 10 & 17 & 14 \end{bmatrix}$$

BA பெருக்கம் கிடையாது.

$$\therefore \quad AB \neq BA.$$

மாதிரி — 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{3\times 2}$$ எனின்,

$AB \neq BA$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+6 & 2+0+2 \\ 2+2+6 & 4+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$BA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+4 & 1+2 & 2+4 \\ 2+0 & 2+0 & 4+0 \\ 3+2 & 3+1 & 6+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$

$$\therefore \quad AB \neq BA.$$

மேலும், AB ஒரு 2×2 அணி; BA ஒரு 3×3 அணி.

2-14. தேற்றம்

ஒரே அணித்தரம் கொண்ட இரு சதுர அணிகளது அணிக்கோவைகளது பெருக்குத் தொகை, அவ்வணிகளது பெருக்கத்தின் அணிக்கோவைக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ எனின்,

$$AB = \left[\sum_{r=1}^{n} a_{ir} \; b_{rj} \right] \quad \text{(வரையறை)}$$

$$\therefore \; |AB| = \left| \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \; b_{rj} \right|$$

$$= |A| \; |B| .$$

மாதிரி – 5

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{எனின்,}$$

$|AB| = |A| \; |B|$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$AB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+0+1 & 1+0-1 & 1+0+1 \\ 1+2+3 & 1+0-3 & 1-2+3 \\ 2+1+1 & 2+0-1 & 2-1+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \; |AB| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4-2)+0+2(6+8)$$
$$= -12+28 = 16.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-3) - 0 + 1(1-4)$$

$$= 1(-1) + 0 + 1(-3) = -4.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(1+1) + 1(-1)$$

$$= -1 - 2 - 1 = -4.$$

$$\therefore\ |A|\,|B| = (-4)\,(-4) = 16.$$

$$\therefore\ |AB| = |A|\,|B|.$$

2-15. நிரை, நிரல் மாற்று அணி (Transpose of a matrix)

யாதேனும் ஓர் அணி A-ன் நிரைகளையும், நிரல்களையும் முறையே தன் நிரல்களாகவும், நிரைகளாகவும் கொண்ட ஓர் அணி A அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். இது A' அல்லது A^T எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ எனின்,

$A' = [a'_{ji}]_{n \times m}$ ஆகும். இங்கு $(a'_{ji} = a_{ij})$

A அணியின் ij-வது மூலகம் A'-ன் ji-வது மூலகமாகும். மேலும், $A = A'$ எனின், A அணி ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

மீண்டும் $(A')' = A$.

2-16. தேற்றம்

A, B அணிகளது அணித்தரம் சமமெனின்,

(i) $(A+B)' = A'+B'$

(ii) $(AB)' = B'A'$ ஆகும்.

நிரூபணம்

(i) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots\cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

என்க.

$$\therefore\ A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots\ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots\ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & & \ldots\ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

எனவே,

$$(A+B)' = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \ldots\ldots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \ldots\ldots & a_{m2}+b_{m2} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \ldots\ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots\ldots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{m2} \\ \ldots & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & & \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots\ldots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= A' + B'$$

$$\therefore\ (A+B)' = A'+B'.$$

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ என்க.

$$\therefore\ AB = [a_{ij}]\ [b_{ij}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk} \right]$$

$$= [c_{ik}] = C \text{ என்க.}$$

எனவே,

$$(AB)' = C' = [c'_{ki}]$$

$$= [c_{ik}]$$

$$= [\sum a_{ij}\ b_{jk}] \quad \text{—— (1)}$$

$$B'\,A' = \left[\sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\ a'_{ji} \right]$$

$$= [\sum b_{jk}\ a_{ij}]$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk} \right] \quad \text{— (2)}$$

$$\therefore\ (AB)' = B'\,A'.$$

குறிப்பு:

$$(ABC)' = [(AB)\,C]'$$

$$= C'\,(AB)' = C'\,B'\,A'$$

$$\therefore\ (ABC)' = C'\,B'\,A'.$$

எனவே, $(A_1 A_2 \ldots A_n)' = A'_n \ldots A'_2 A'_1.$

2-17. இணையிய அணி (Conjugate of a matrix)

A அணி என்பது சிக்கலெண் களம் C-ன் மீதமைந்த ஓர் அணி என்க. சிக்கலெண்களுக்குப் பதில் அதன் இணைச் சிக்கலெண்களைப் பிரதியிட்டுப்பெறும் அணி இணையிய அணி (அ) துணைச்சிக்கலணி (Conjugate matrix) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 3-i \\ 1-i & 1+i & 2+3i \\ 3+2i & i & 1-i \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

துணைச்சிக்கலணி (அ) இணையிய அணி

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 3+i \\ 1+i & 1-i & 2-3i \\ 3-2i & -i & 1+i \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

2-18. தேற்றம்

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ இரு அணிகள் எனின்

(i) $A = \bar{\bar{A}}$

(ii) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$

(iii) $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$

நிரூபணம்

(i) A-ன் ij-வது மூலகம் a_{ij} $(\because A = [a_{ij}])$

$\therefore \bar{A}$-ன் ij-வது மூலகம் $\bar{a}_{ij}$

$= a_{ij}$-ன் இணைச்சிக்கலெண்

$\bar{\bar{A}}$-ன் ij–வது மூலகம் $\bar{\bar{a}}_{ij}$

$= \bar{a}_{ij}$-ன் இணைச்சிக்கலெண்

$= a_{ij}$

$= A$-ன் ij–வது மூலகம்.

$\therefore [\bar{\bar{a}}_{ij}] = [a_{ij}]$

(அ-து) $\bar{\bar{A}} = A$.

(ii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ என்க.

$$\therefore \quad A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n}$$

எனவே,
$$\begin{aligned} \overline{A+B} &= [\overline{a_{ij}+b_{ij}}] \\ &= [\overline{a_{ij}}+\overline{b_{ij}}] \\ &= [\overline{a_{ij}}] + [\overline{b_{ij}}] \\ &= \overline{A} + \overline{B} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}.$$

(iii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ என்க.

$$\therefore \overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{m \times n}, \quad \overline{B} = [\overline{b_{ij}}]_{n \times p}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik} \; b_{kj}} \right]_{m \times p} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}} \; \overline{b_{kj}} \right]_{m \times p} \\ &= [\overline{a_{ij}}] \; [\overline{b_{ij}}] \\ &= \overline{A} \; \overline{B}. \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{A} \; \overline{B}.$$

2-19. நிரை, நிரல் மாற்று இணையிய சிக்கலணி (Conjugate transpose of a matrix)

சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த அணி A என்க. A-ன் துணைச் சிக்கலணி (அ) இணையிய சிக்கலணி $\overline{A}$ எனின், $\overline{A}$-ன் நிரை, நிரல் மாற்று அணி $(\overline{A})'$ ஆனது A-ன் நிரை, நிரல் மாற்று இணையிய சிக்கலணி எனப்படும். இது A^* என்று குறியிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ 2-i & 2+3i & 3+2i \\ i & -i & 2+2i \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{எனின்,}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i & 0 \\ 2+i & 2-3i & 3-2i \\ -i & +i & 2-2i \end{bmatrix}_{3 \times 3},$$

$$A^* = (\overline{A})' = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i & -i \\ 1+i & 2-3i & +i \\ 0 & 3-2i & 2-2i \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

2-20. ஹெர்மிசியன் அணிகள் (Hermitian matrices)

A என்ற ஒரு சதுர அணி $A^* = A$ என்ற முறையில் இருப்பின் அது ஹெர்மிசியன் அணி என்றும் $A^* = -A$ என்ற முறையில் இருப்பின் அது எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி ((Skew Hermitian matrix) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 1-i & 2 & 3+i \\ i & 3-i & 3 \end{bmatrix}$ எனின், $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & i \\ 1+i & 2 & 3-i \\ -i & 3+i & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^* = \overline{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -i \\ 1-i & 2 & 3+i \\ i & 3-i & 3 \end{bmatrix} = A.$$

எனவே, A ஒரு ஹெர்மிசியன் அணி.

(ii) $A = \begin{bmatrix} i & 2-3i & 4+5i \\ -(2+3i) & 0 & 2i \\ -(4-5i) & 2i & -3i \end{bmatrix}$ எனின்,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -i & 2+3i & 4-5i \\ -(2-3i) & 0 & -2i \\ -(4+5i) & -2i & 3i \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -i & -(2-3i) & -(4+5i) \\ 2+3i & 0 & -2i \\ 4-5i & -2i & 3i \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} i & 2+3i & 4+5i \\ 2+3i & 0 & 2i \\ -(4-5i) & 2i & -3i \end{bmatrix} = -A$$

(அ-து) $\quad A^* = -A.$

எனவே, A ஒரு எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி.

மாதிரி-6

A, B என்ற இரு $m \times n$ அணிகளது நிரை,' நிரல் மாற்று இணையிய சிக்கலணிகள் (conjugate transpose) முறையே A^*, B^*, C என்ற ஒரு $n \times p$ அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று இணையிய சிக்கலணி C^* எனின்,

(i) $(A^*)^* = A$

(ii) $(A+B)^* = A^*+B^*$

(iii) $(AC)^* = C^* A^*$

நிரூபணம்

A, B அணிகளது நிரை, நிரல் மாற்று இணையிய சிக்கலணிகள் முறையே A^*, B^* ஆதலின்,

$$A^* = (\overline{A})' = (\overline{A'})$$
$$B^* = (\overline{B})' = (\overline{B'})$$
$$C^* = (\overline{C})' = (\overline{C'})$$

(i) $\underline{(A^*)^* = A}$

$$(A^*)^* = \left(\overline{\{(\overline{A})'\}'}\right), \quad (\because A^* = (\overline{A})' = (\overline{A'}))$$
$$= \overline{(\overline{A'})}, \qquad (\because (A')' = A)$$
$$= A$$

$\therefore \quad (A^*)^* = A.$

(ii) $\underline{(A+B)^* = A^*+B^*}$

$$(A+B)^* = \{\overline{(A+B)'}\}$$
$$= \{\overline{A'+B'}\}$$
$$= (\overline{A'}) + (\overline{B'}) = A^*+B^*$$

$\therefore \quad (A+B)^* = A^*+B^*$

(iii) $\underline{(AC)^* = C^* A^*}$

$$(AC)^* = \{\overline{(AC)'}\}$$
$$= (\overline{C' A'}), \quad (\because (AC)' = C'A')$$
$$= (\overline{C'}\ \overline{A'})$$
$$= C^* A^*$$

$\therefore \quad (AC)^* = C^* A^*$

மாதிரி–7

A என்பது யாதாமொரு சதுர அணி எனின், $A+A^*$ ஒரு ஹெர்மிசியன் அணி எனவும், $A-A^*$ ஒரு எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி எனவும் நிறுவுக.

நிருபணம்

$A = A^*$ எனின், A ஹெர்மிசியன் அணி.
$-A = A^*$ எனின், A எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி.

இப்பொழுது,

$$\begin{aligned}(A+A^*)^* &= A^*+(A^*)^* \\ &= A^*+A \\ &= A+A^*\end{aligned}$$

எனவே, $A+A^*$ ஒரு ஹெர்மிசியன் அணி.

மீண்டும்,

$$\begin{aligned}(A-A^*)^* &= A^*-(A^*)^* \\ &= A^*-A \\ &= (A-A^*)\end{aligned}$$

எனவே, $A-A^*$ ஒரு எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி.

மாதிரி–8

A, B என்பவை ஹெர்மிசியன் அணிகளெனின், $A+B$, $AB+BA$ என்பவை ஹெர்மிசியன் அணிகள் எனவும், $AB-BA$ எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி எனவும் நிறுவுக.

நிருபணம்

A, B ஹெர்மிசியன் அணிகளாதலின்,

$A=A^*, \quad B=B^*$

$\therefore \quad (A+B)^* = A^*+B^* = A+B.$

$\therefore$ $(A+B)$ ஒரு ஹெர்மிசியன் அணி.

$$\begin{aligned}(AB+BA)^* &= (AB)^* + (BA)^* \\ &= B^*A^* + A^*B^* \\ &= BA + AB \\ &= AB + BA.\end{aligned}$$

$\therefore$ $(AB+BA)$ ஒரு ஹெர்மிசியன் அணி.

$$\begin{aligned}(AB-BA)^* &= (AB)^* - (BA)^* \\ &= B^*A^* - A^*B^* \\ &= BA - AB \\ &= -(AB-BA).\end{aligned}$$

$\therefore$ $(AB-BA)$ ஒரு எதிர் ஹெர்மிசியன் அணி.

2-21. செங்குத்தணிகள் (Orthogonal matrices)

A என்ற ஒரு சதுர அணி $A'A=I$ என்றவாறு இருப்பின், செங்குத்தணி (Orthogonal matrix) எனப்படும்.

$$A'A = I \Rightarrow (A'A)' = I'$$
$$\Rightarrow \quad A'(A')' = I \qquad (\because I' = I)$$
$$\Rightarrow \quad A'A = I$$
$$\therefore \quad A'A = I \Rightarrow AA' = I$$

2-22. அலகு அணி (Unitary matrix)

A என்ற ஒரு சதுர அணி $A^*A = I$ என்றவாறு இருப்பின், அது அலகு அணி (Unitary matrix) எனப்படும்.

மாதிரி-9

$A=\begin{bmatrix} Cos\,\theta & Sin\,\theta \\ -Sin\,\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix}$ எனின், A ஒரு செங்குத்தணி என நிறுவுக.

நிருபணம்

$$A= \begin{pmatrix} Cos\,\theta & Sin\,\theta \\ -Sin\,\theta & Cos\,\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A' = \begin{bmatrix} Cos\,\theta & -Sin\,\theta \\ +Sin\,\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A'A = \begin{bmatrix} Cos\,\theta & -Sin\,\theta \\ Sin\,\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cos\,\theta & Sin\,\theta \\ -Sin\,\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Cos^2\,\theta + Sin^2\,\theta & Cos\,\theta\, Sin\,\theta - Sin\,\theta\, Cos\,\theta \\ Sin\,\theta\, Cos\,\theta - Sin\,\theta\, Cos\,\theta & Sin^2\,\theta + Cos^2\,\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(அ-து) $A'A = I$

$\therefore$ A என்பது ஒரு செங்குத்தணி.

மாதிரி-10

$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$ என்பது அலகு அணி என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore A' = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

எனவே, $A^* = (\overline{A'}) = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^*A = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-i^2}{4} + \frac{1-i^2}{4} & -\frac{(1-i)^2}{4} + \frac{(1-i)^2}{4} \\ -\frac{(1+i)^2}{4} + \frac{(1+i)^2}{4} & \frac{1-i^2}{4} + \frac{1-i^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{4} + \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore \quad A^*A = I$$

எனவே, A ஒரு அலகு அணியாகும்.

2-23. பூச்சியக்கோவை அணி (Singular matrix)

$|A| = 0$ எனின், A அணி பூச்சியக்கோவை அணி எனவும், $|A| \neq 0$ எனின், A அணி பூச்சியமில் கோவை அணி (non-Singular matrix) எனவும் கூறப்படும்.

2-24. சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a matrix)

$A = [a_{ij}]$ ஒரு சதுர அணி, a_{ij}-ன் இணைக்காரணி A_{ij} எனின், ($|A|$ -ல்),

சேர்ப்பு அணி $A = [A_{ij}]'$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\text{(அ-து) சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ A_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

மாதிரி–11

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், *A* அணியின் சேர்ப்பு அணி காண்க.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$A_{11} = a_{11}$–ன் இணைக்காரணி $= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{12} = a_{12}$–ன் இணைக்காரணி $= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = a_{13}$–ன் இணைக்காரணி $= +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$

இவ்வாறே, $A_{21} = 4$, $A_{22} = -5$, $A_{23} = -2$

$A_{31} = -2$, $A_{32} = 4$, $A_{33} = 1$ என்றாகும்.

$\therefore |A|$ –ன் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணி

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ சேர்ப்பு *A* = இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2–25. தேற்றம்

A ஒரு சதுர அணி எனின்,

A (சேர்ப்பு *A*) = (சேர்ப்பு *A*) *A* = $|A|\, I$ என்றாகும்.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$ எனின்,

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$ ஆகும்.

$\therefore A$ (சேர்ப்பு A) =

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$= |A|\ I.$

இவ்வாறே (சேர்ப்பு A) $A = |A|\ I$ என நிறுவலாம்.

$\therefore\quad A$ (சேர்ப்பு A) = (சேர்ப்பு A) $A = |A|\ I.$

மாதிரி–12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ எனின்,

A (சேர்ப்பு A) = (சேர்ப்பு A) $A = |A|\ I$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

மாதிரி–11–ல் $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ எனின்,

$$\text{சேர்ப்பு } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ என நிறுவினோம்.

$$\therefore\ A\,(\text{சேர்ப்பு } A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+2 & 4+0-4 & -2+0+2 \\ 2-2+0 & 8-5+0 & -4+4+0 \\ 3-4+1 & 12-10+2 & -6+8+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1\,(1-0) + 0 + 2\,(4-3) \\ &= 1\,(1) + 2\,(1) \\ &= 1+2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

$$\therefore\ A\,(\text{சேர்ப்பு } A) = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I$$

இவ்வாறே (சேர்ப்பு A) $A = |A|\,I$ என நிரூபிக்கலாம்.

2-26. தேற்றம்

A, B இரண்டும் n– சதுர அணிகள், $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ எனின், (சேர்ப்பு AB) = (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A) எனவாகும்.

நிரூபணம்

AB ஒரு சதுர அணியாதலின்

AB (சேர்ப்பு AB) $= |AB|\, I =$ (சேர்ப்பு AB) AB. –(1)

AB (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A)

$= A$ (B சேர்ப்பு B) சேர்ப்பு A

$= A\,(|B|\,I)$ சேர்ப்பு A ($\because$ B சேர்ப்பு $B = |B|\,I$)

$= |B|\,(AI)$ சேர்ப்பு A

$= |B|$ (A சேர்ப்பு A) ($\because AI = A$)

$= |B|\,(|A|\,I)$

$= |B|\;|A|\,I$

$= |A|\;|B|\,I$

$= |AB|\,I.$

$=$ AB (சேர்ப்பு AB). ($\because$ (1)–ன் படி)

இவ்வாறே,

$$
\begin{aligned}
&(\text{சேர்ப்பு } B)\ (\text{சேர்ப்பு } A)\ AB \\
&= \text{சேர்ப்பு } B\ \{(\text{சேர்ப்பு } A)A\}\ B \\
&= \text{சேர்ப்பு } B\ (\,|A|\,I)\ B \\
&= |A|\ \text{சேர்ப்பு } B\ (IB) \\
&= |A|\ (\text{சேர்ப்பு } B)\ B \qquad (\because IB = B) \\
&= |A|\ (\,|B|\,I) \\
&= |A|\ |B|\ I \\
&= |AB|\ I \\
&= (\text{சேர்ப்பு } AB)\ AB. \qquad (\because (1)\text{-ன் படி})
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (சேர்ப்பு AB) $=$ (சேர்ப்பு B) (சேர்ப்பு A).

2-27. நேரெதிர் அணி (Inverse of a matrix)

A ஒரு சதுர அணி என்க. $AB = BA = I$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் B என்ற ஓர் அணி இருக்குமெனின், B அணி A அணியின் நேரெதிர் அணி (Inverse of a matrix) எனப்படும். இது $\overline{A}^{1}$ என குறிப்பிடப்படும்.

$$A\ (\text{சேர்ப்பு } A) = |A|\ I \text{ ஆதலின்,}$$

$$|A| \neq 0 \text{ எனில், } I = \frac{A\ (\text{சேர்ப்பு } A)}{|A|} \text{ என்றாகும்.}$$

$$\text{எனவே, } \overline{A}^{1} = \frac{\text{சேர்ப்பு } A}{|A|} \text{ என்றாகும்.}$$

நேரெதிர் அணி சதுர அணிக்கு மட்டுமே உண்டு.

2-28. தேற்றம்

A என்ற ஒரு சதுர அணிக்கு நேரெதிர் அணி இருக்க போதுமானதும் அவசியமானதுமான கட்டுப்பாடு $|A| \neq 0$ ஆகும்.

நிரூபணம்

$|A| \neq 0$ என்க.

$$B = \frac{1}{|A|}\ (\text{சேர்ப்பு } A) \text{ எனின்,}$$

$$AB = A.\ \frac{1}{|A|}\ (\text{சேர்ப்பு } A) = \frac{1}{|A|} \cdot A\ (\text{சேர்ப்பு } A)$$

$$= \frac{1}{|A|} \quad |A| \; I \qquad (\because A\,(\text{சேர்ப்பு } A) = |A|\, I)$$

$$= I.$$

$$BA = \frac{1}{|A|}\;(\text{சேர்ப்பு } A).\,A = \frac{1}{|A|} \cdot |A|\, I = I$$

$$\therefore \; AB = BA = I$$

எனவே, $B = \frac{1}{|A|}$ (சேர்ப்பு A) என்பது $\overline{A}^{1}$ (A-ன் நேரெதிர் அணி) ஆகும்.

$\therefore \; |A| \neq 0$ எனின், $\overline{A}^{1}$ உண்டு.

அடுத்து, A-ன் நேரெதிர் அணி B எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $AB = I$

$\therefore |AB| = |I| = I$

$\therefore |A| \; |B| = I$

எனவே, $|A| \neq 0$.

2-29. தேற்றம்

A அணிக்கு நேரெதிர் அணி உண்டு எனின், அது ஒரே முறையில் இருக்கும்.

நிரூபணம்

A என்ற ஒரு சதுர அணிக்கு நேரெதிர் அணி உண்டு எனவும் அவை B, C எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore AB = I = BA$ (வரையறை)

$AC = I = CA$ (வரையறை)

$\therefore AB = AC$

எனவே, $CAB = (CA)\,B = I\,B = B.$

$CAB = C\,(AB) = C\,I = C.$

$\therefore B = C.$

எனவே, A அணியின் நேரெதிர் அணி ஒரே முறையில் உண்டு.

2-30. தேற்றம்

(i) A பூச்சியமில் கோவை அணி $AB = AC$ எனின், $B = C$.

(ii) $\overline{(AB)}^{1} = B^{1}\,\overline{A}^{1}$

(iii) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i) A பூச்சியமில் கோவை அணி யாதலின் $\bar{A}'$ உண்டு.

$$AB = AC$$

இருபக்கமும் A' ஆல் முன் பெருக்கம் செய்யின்,

$$\bar{A}'(AB) = \bar{A}'(AC)$$
$$(\bar{A}'A)B = (\bar{A}'A)C$$
$$IB = IC \qquad (\because \bar{A}'A = I)$$
$$\therefore B = C.$$

எனவே, $|A| \neq 0$, $AB = AC$ எனின், $B = C$.

(ii) A, B என்ற அணிகள் பூச்சியமில் கோவை அணிகள் என்க.

$$\therefore |A| \neq 0, \quad |B| \neq 0.$$

$\therefore \bar{A}', \bar{B}'$ என்பவை $A\bar{A}' = \bar{A}'A = I$

$$B\bar{B}' = \bar{B}'B = I$$

என்ற முறையில் உண்டு.

$$\because |AB| = |A|\,|B|, \; |AB| \neq 0.$$

எனவே, AB பூச்சியமில் கோவை அணி. $\therefore (AB)^{-1}$ உண்டு.

$(AB)^{-1} = C = \bar{B}'\bar{A}'$ என்க.

$$\therefore C(AB) = (\bar{B}'\bar{A}')(AB)$$
$$= \bar{B}'(\bar{A}'A)B$$
$$= \bar{B}'IB \qquad (\because \bar{A}'A = I)$$
$$= \bar{B}'B \qquad (\because IB = B)$$
$$= I$$

$$(AB)C = (AB)(\bar{B}'\bar{A}')$$
$$= A(B\bar{B}')\bar{A}'$$
$$= AI\bar{A}' \qquad (\because B\bar{B}' = I)$$
$$= A\bar{A}' \qquad (\because AI = A)$$
$$= I$$

$$\therefore C(AB) = (AB)C = I$$

எனவே, (AB) அணியின் நேரெதிர் அணி $\bar{B}'\bar{A}'$

(அ-து) $(AB)^{-1} = \bar{B}'\bar{A}'$.

(iii) A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி என்க. $\therefore |A| \neq 0$.
$\because |A| = |A'|$, $|A'| \neq 0$.

எனவே, A' ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணியாகும். ஆதலின் அதற்கு ஒரு நேரெதிர் அணி உண்டு.

A, A'-ன் நேரெதிர் அணிகள் முறையே A , $(\bar{A}')'$ என்க.

$$A\bar{A}' = \bar{A}' A = I$$

$$\therefore (A\bar{A}')^1 = (\bar{A}' A)' = I'$$

$$\therefore (\bar{A}')' A' = A' (\bar{A}')^1 = I \qquad (\because I' = I)$$

$$\text{இது } AB = BA = I$$

என்றவாறு உள்ளது. எனவே, A-ன் நேரெதிர் அணி B.
(அ-து) A'-ன் நேரெதி. அணி $(\bar{A}')^1$

$$\therefore (\bar{A}')^1 = (\overline{A'})$$

2-31. சமன்பாடுகளின் தீர்வு (Solution of equations)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots & + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots & + a_{2n} x_n = b_2 \\ \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots & + a_{nn} x_n = b_n \end{aligned}$$

என்ற n ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

என எழுதலாம்.

$$\text{எனவே, } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{எனின்,}$$

மேற் குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகள்,

$$A X = B$$

என்ற அணிச் சமன்பாடாகும்.

$| A | = 0$ எனின், A^{1} என்ற நேரெதிர் அணி A-க்கு உண்டு.

$$A X = B$$

என்ற சமன்பாட்டை $\bar{A}^{1}$ -ஆல் இருபுறமும் முன்பெருக்கம் செய்யின்,

$$\bar{A}^{1} \; A \; X = \bar{A}^{1} \; B \quad \text{என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad (\bar{A}^{1} A) X = \bar{A}^{1} B$$

$$I X = \bar{A}^{1} B \qquad (\because \bar{A}^{1} A = I)$$

$$\therefore \quad X = \bar{A}^{1} B.$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \bar{A}^{1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ஆகும்.}$$

மாதிரி–13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{எனின்,}$$

A-ன் சேர்ப்பு அணி, நேரெதிர் அணி காண்க.

நிரூபணம்

$$| A | = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4-3) - 2(6-3) + 1(3-2)$$

$$= 1 - 6 + 1 = -4 \neq 0.$$

எனவே, A பூச்சியமில் கோவை அணியாகும்.

$a_{11} = 1$-ன் இணைக்காரணி $A_{11} = 1$

$a_{12} = 2$-ன் இணைக்காரணி $A_{12} = -3$

$a_{13} = 1$-ன் இணைக்காரணி $A_{13} = 1$

இவ்வாறே, $A_{21} = -3, \; A_{22} = 1, \; A_{23} = 1$

$A_{31} = 4, \; A_{32} = 0, \; A_{33} = -4.$

$$\text{எனவே, (சேர்ப்பு } A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

எனவே, $\bar{A}' = \dfrac{(\text{சேர்ப்பு } A)}{|A|}$

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & +\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–14

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனின், $A\bar{A}' = I$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$\bar{A}' = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{மாதிரி–13})$$

$$\therefore A\bar{A}' = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-6+1 & -3+2+1 & 4+0-4 \\ 3-6+3 & -9+2+3 & 12+0-12 \\ 1-3+2 & -3+1+2 & 4+0-8 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\therefore A\bar{A}' = I.$

மாதிரி–15

$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ செங்குத்தணி என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$A = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A' = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A'A = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1+4+4 & -2-2+4 & -2+4-2 \\ -2-2+4 & 4+1+4 & 4-2-2 \\ -2+4-2 & 4-2-2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(அ-து) $A'A = I.$

எனவே, A அணி ஒரு செங்குத்தணியாகும்.

மாதிரி–16

(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) என்பவை இரு செங்குத்துக்கோடுகளது திசைக் கொசைன்களெனின்,

$$\begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} l_2^2 & l_2m_2 & l_2n_2 \\ l_2m_2 & m_2^2 & m_2n_2 \\ l_2n_2 & m_2n_2 & n_2^2 \end{bmatrix} = O$$ (பூச்சிய அணி)

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) திசைக் கொசைன்களாதலின்,

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$
$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

$$\begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1^2(l_1^2+m_1^2+n_1^2) & l_1m_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2) & l_1n_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2) \\ l_1m_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2) & m_1^2(l_1^2+m_1^2+n_1^2) & m_1n_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2) \\ l_1n_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2) & m_1n_1(l_1^2+m_1^2+n_1^2) & n_1^2(l_1^2+m_1^2+n_1^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix}, \because \sum 1_1^2 = 1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} l_2^2 & l_2m_2 & l_2n_2 \\ l_2m_2 & m_2^2 & m_2n_2 \\ l_2n_2 & m_2n_2 & n_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ l_1m_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2^2 & l_2m_2 & l_2n_2 \\ l_2m_2 & m_2^2 & m_2n_2 \\ l_2n_2 & m_2n_2 & n_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 l_2 \sum l_1 l_2 & l_1 m_2 \sum l_1 l_2 & l_1 n_2 \sum l_1 l_2 \\ m_1 l_2 \sum l_1 l_2 & m_1 m_2 \sum l_1 l_2 & m_1 n_2 \sum l_1 l_2 \\ n_1 l_2 \sum l_1 l_2 & n_1 m_2 \sum l_1 l_2 & n_1 n_2 \sum l_1 l_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\because \sum 1_1 1_1 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0)$$

$= 0.$

பயிற்சி 2-1

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

எனின்,

(i) $A+B=B+A$

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(iii) $3(A+B)=3A+3B$

(iv) $(B+C)5=5B+5C$

என நிறுவுக.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனின்,

AB பெருக்கம் காண்க.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A(B+C) = AB+AC$ என நிறுவுக.

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ எனின்,

$(3A-2B)^2 = I$ என நிறுவுக.

4. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்,

$I = I^2 = I^3 = \ldots = I^n$ என நிறுவுக.

5. $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

எனின், பின் வருபனவற்றை நிறுவுக.

(i) $A^2 = B^2 = C^2$

(ii) $AB = BA = -C$

(iii) $A = CB = -BC$.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A^3 - 3A^2 + 3A - I$ காண்க.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனின்,

$(AB)' = B'A'$ என நிறுவுக.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ எனின்,

(சேர்ப்பு A), A-ன் நேரெதிர் அணி காண்க.

{ **விடை :** (சேர்ப்பு A) $\begin{bmatrix} 25 & -10 & -15 \\ -10 & 4 & 11 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;

$$\bar{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$ }

9. அணி முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளது தீர்வு காண்க.

$$12x + 7y - 4z = 4$$
$$7x - 4y + 2z = 11$$
$$6x + 11y + 3z = 12$$

{ விடை: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$ }.

10. A ஒரு n தரம் கொண்ட சதுர சமச்சீர் அணி, B அதே தரம் கொண்ட ஒரு சதுர எதிர்ச் சீரணி, $(A+B)$ ஒரு பூச்சியமில் அணிக்கோவை, $C = (A+B)^{-1}(A-B)$ எனின்,

(i) $C'(A+B)C = A+B$

(ii) $C'(A-B)C = A-B$

(iii) $C'AC = A$ என நிறுவுக.

11. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ எனின்,

$(AB)' = B'A'$ என நிறுவுக.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ அணியின் நேரெதிர் அணி B எனின்,

$$(A+B)^2 = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என நிறுவுக.

3. ஒருபடிச் சமன்பாடுகள், அணி அளவை-தொடக்க மாற்றங்கள்

(Linear equations, Rank of a matrix, Elementary Transformations)

3–1. சிற்றணிக்கோவை (Minor of a matrix)

A என்ற ஓர் அணியில் *r* நிரைகள், *r* நிரல்கள் தவிர்த்து மற்ற நிரைகளையும் நிரல்களையும் நீக்கக் கிடைக்கும் $r \times r$ அணிக் கோவை, *A* அணியின் சிற்றணிக்கோவை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ ஒரு சிற்றணிக் கோவையாகும்.}$$

இது *A* அணியில் 3 நிரைகள், 3 நிரல்கள் தவிர்த்து மற்ற நிரைகளையும் நிரல்களையும் நீக்கக் கிடைக்கும் 3×3 அணிக்கோவையாகும்.

மாதிரி–1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

மீப்பெரு தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகள் காண்க.

நிரூபணம்

முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது நிரல்களை நீக்கிக் கிடைக்கப்பெறும் கீழணிகள் (Sub-matrices) முறையே

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே, மீப்பெரு தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகள்

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

இவை ஒவ்வொன்றினது தரமும் 3 ஆகும்.

3–2. அணி அளவை (Rank of a matrix)

ஒரு சதுர அணி A–ல் r தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகளில் யாதேனும் ஒன்று பூச்சியமில் அணிக்கோவையாகவும், மற்ற எல்லா $(r+1)$ தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகளும் பூச்சியமாகவும் இருப்பின், A–ன் அணி அளவை r ஆகும்.

ஒரு சதுர அணி A–ன் தரம் n என்க. பின் $|A| \neq 0$ எனின், A–ன் அணி அளவை n ஆகும். $|A| = 0$ எனின், A–ன் அணி அளவை $r < n$.

A அணியின் அணி அளவை $\rho(A)$ எனக் குறிப்பிடப்படும். முற்றும் பூச்சிய அணியின் அணி அளவை பூச்சியமாகும்.

மாதிரி–2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் அணி அளவைக் காண்க.

நிரூபணம்

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-8)+2(0+10)+1(-12)$$
$$= -8+20-12$$
$$= 0.$$

(அ-து) $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 \neq 0.$$

எனவே, $\rho(A) = 2.$

மாதிரி–3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

A–ன் அணி அளவைக் காண்க.

நிரூபணம்

அணி A–ன் மீப்பெரு தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகள்

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-2) - 1(0-6) - 1(1+3) = -2+6-4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-0) + 1(-1+1) + 1(0-2) = 2+0-2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+1) - 1(1+3) + 1(1+3) = 0-4+4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-0) + 1(1+3) + 1(0-6) = 2+4-6 = 0.$$

(அ-து) மீப்பெரு சிற்றணிக் கோவைகள் அனைத்தும் பூச்சியமாம். இவை ஒவ்வொன்றின் தரமும் 3 ஆகும்.

அடுத்து தரம் 2 உள்ள சிற்றணிக் கோவைகளை ஆராய்வோம். அவற்றுள் ஒன்று,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2 \neq 0.$$

எனவே, A அணியின் அணி அளவை 2.

(அ-து) $\rho(A) = 2.$

3–3. தொடக்க மாற்றங்கள் (Elementary transformations)

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று மாற்றங்களும் தொடக்க மாற்றங்கள் எனப்படும்.

1. ஓர் அணியில் யாதேனும் இரு நிரைகளை அல்லது இரு நிரல்களை ஒன்றுக் கொன்று இடமாற்றுதல்.

குறியீட்டில், R_{ij} என்பது i, j–வது நிரைகள் முறையே j, i–வது நிரைகளாக மாற்றமடைவதையும்; C_{ij} என்பது i, j–வது நிரல்கள் முறையே j, i–வது நிரல்களாக மாற்றமடைவதையும் குறிக்கும்.

2. ஓர் அணியில் யாதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றையும் பூச்சியமில் எண்ணால் பெருக்குதல்.

குறியீட்டில், λR_i என்பது i–வது நிரையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் λ என்ற பூச்சியமில் எண்ணால் பெருக்குவதையும் λC_j என்பது j–வது நிரலிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் λ –ஆல் பெருக்குவதையும் குறிக்கும்.

3. யாதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரல்களிலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தையும் பூச்சியமில் எண்ணால் பெருக்கிப் பிரிதொரு நிரை அல்லது நிரலின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் கூட்டுதல்.

குறியீட்டில், $(\lambda R_i + R_j)$ என்பது i–வது நிரையிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் λ–ஆல் பெருக்கி j–வது நிரையிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டுவதையும், $(\lambda C_i + C_j)$ என்பது i–வது நிரலிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் λ–ஆல் பெருக்கி j–வது நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டுவதையும் குறிக்கும்.

குறிப்பு :

A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியிலிருந்து தொடக்க மாற்றங்களால் கிடைக்கப்பெறும் B என்ற $m \times n$ அணி, A–ன் இணைமாற்று அணி (Equivalent matrix) எனப்படும். இது $B \sim A$ எனக் குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

$$\text{(i)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \underset{C_{34}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = B$$

இங்கு மூன்றுவது, நான்காவது நிரல்கள் முறையே நான்காவது மூன்றுவது நிரல்களாக மாற்றப்பட்டுள்ளன.

$$\text{(ii)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \underset{2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = B$$

இங்கு இரண்டாவது நிரை இரண்டால் பெருக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\text{(iii)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \underset{C_4+2C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 11 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 12 \end{bmatrix} = B$$

இங்கு முதல் நிரலின் மூலகங்களை இரண்டால் பெருக்கி நான்காவது நிரலின் ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டப்பட்டுள்ளது.

3–4. நேரெதிர் தொடக்கமாற்றம் (Inverse elementary transformations)

ஓர் அணி A–ல் யாதேனும் ஒரு தொடக்கமாற்றம் செய்ய B எனும் இணைமாற்று அணி கிடைக்கப்பெறும் என்க. பின் எந்த ஒரு மாற்றம் B–ல் செய்தால் மீண்டும் A அணி கிடைக்குமோ, அத் தொடக்கமாற்றமானது A அணியில் நடைபெற்ற மாற்றத்தின் நேரெதிர் தொடக்கமாற்றம் எனப்படும்.

A அணியின் i, j-வது நிரைகளை இடமாற்றுவதை R_{ij} என்க. இந்த மாற்றத்தால் கிடைக்கப்பெறும் அணி B என்க. பின் இதே R_{ij} இடமாற்றத்தை B–ல் செய்தால் மீண்டும் A அணி கிடைக்கும். எனவே, R_{ij}–ன் நேரெதிர் தொடக்கமாற்றம் R_{ij} ஆகும். இவ்வாறே C_{ij}–ன் நேரெதிர் தொடக்கமாற்றம் C_{ij} ஆகும்.

மீண்டும் i–வது நிரையை λ–ஆல் பெருக்க B அணி கிடைக்குமெனின், B அணியில் i–வது நிரையை $\frac{1}{\lambda}$–ஆல் பெருக்க A அணி கிடைக்கும். எனவே λR_i–ன் நேரெதிர்மாற்றம் $\frac{1}{\lambda} R_i$ ஆகும்.

3–5. தொடக்க அணிகள் (Elementary matrices)

ஓர் அணி அலகை (unit matrix) யாதேனும் ஒரு தொடக்க மாற்றத்திற்கு உட்படுத்திக் கிடைக்கப்பெறும் அணி தொடக்க அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

R_{13} செய்கைக்குட்படுத்தப்பட்டு கிடைக்கப்பெறும் அணி

$$I \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim B$$

C_{13} செய்கைக்குட்படுத்தி கிடைக்கப்பெறும் அணி

$$I \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim C$$

அணி B-யும் அணி C-யும் ஒன்றே என்பதைக் கவனிக்க.

3-6. தொடக்க அணிகளும் குறியீடுகளும்

ஓர் அணி அலகில் (unit matrix) i, j-வது நிரைகளையோ (அல்லது) i, j-வது நிரல்களையோ இடம்மாற்றி கிடைக்கப்பெறும் அணி E_{ij} எனக்குறியிடப்படும்.

$$|I| = 1.$$

ஆனால் $|E_{ij}| = -1$ ($\because$ 2 நிரை (அ) நிரல்கள் இடம் மாறினால் அணிக்கோவையின் குறி மாறும்).

ஓர் அணி அலகில் i-வது நிரையையோ (அ) i-வது நிரலையோ λ-ஆல் பெருக்கிக் கிடைக்கப்பெறும் அணி λE_i எனக்குறியிடப்படும்.

$$\because \; |I| = 1, \qquad |\lambda E_{ij}| = \lambda.$$

ஓர் அணி அலகில் j-வது நிரையை λ என்ற மாறிலியால் பெருக்கி i-வது நிரையின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் கூட்டிக் கிடைக்கப் பெறும் அணி $E_{ij}(\lambda)$ எனக்குறியிடப்படும். ஓர் அணி அலகில் j-வது நிரலை λ என்ற மாறிலியால் பெருக்கி, i-வது நிரலுடன் கூட்டிக் கிடைக்கப்பெறும் அணி $E_{ij}(\lambda)$ எனப்படும்.

$E'_{ij}(\lambda)$ அணி $E_{ij}(\lambda)$ அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணியாகும் என்பதைக் கவனிக்க.

$$\because \; |I| = 1, \qquad |E_{ij}(\lambda)| = 1.$$

3-7. தேற்றம்

ஒரு $m \times n$ அணியில் செய்யப்படும் ஒவ்வொரு ஆதார நிரை மாற்றங்களும், அவ்வணியை இம்மாற்றங்களை யொத்த $m \times m$ ஆதார அணியால் முன்பெருக்கம் (Pre multiply) செய்து கிடைக்கப் பெறும்.

ஒரு $m \times n$ அணியில் செய்யப்படும் ஒவ்வொரு ஆதார நிரல் மாற்றமும், அவ்வணியை இம்மாற்றங்களை யொத்த $n \times n$ ஆதார அணியால் பின் பெருக்கம் (Post multiply) செய்து கிடைக்கப் பெறும்.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \dots \\ R_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p} = [C_1, C_2, \dots, C_r]$$

என்க.

இங்கு, R_i என்பது $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ என்ற நிரை வெக்டர் (Row Vector).

C_j என்பது $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ என்ற நிரல் வெக்டர் (Column Vector).

பின்,

$$C = AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \dots & R_1C_p \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \dots & R_2C_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \dots & R_mC_p \end{bmatrix}_{m \times p}$$

இங்கு $R_i\ C_j$ என்பது R_i, C_j என்ற வெக்டர்களது உட் பெருக்குத் தொகை (Inner product) யாகும்.

இதிலிருந்து A-ன் நிரைகளில் ஏதேனும் ஒரு ஆதார நிரை மாற்றம் நிகழுமெனின் AB-ன் நிரைகளிலும் அதே வகை நிரை மாற்றம் நிகழுமெனவும், B-ன் நிரல்களில் ஏதேனும் ஒரு ஆதார நிரல்மாற்றம் நிகழுமெனின் AB-ன் நிரல்களிலும் அதே வகை நிரல்மாற்றம் நிகழுமெனவும் அறிகிறோம். எனவே, AB-ல் நிகழ வேண்டிய ஒவ்வொரு ஆதார நிரை மாற்றமும், முன்பெருக்கலணி

A-ல் செய்வதன் மூலமும், AB-ல் நிகழவேண்டிய ஒவ்வொரு ஆதார நிரல் மாற்றமும் பின் பெருக்கலணி B-ல் நிகழ்த்துவதன் மூலமும் கிடைக்கப்பெறலாம் என்றுகிறது.

இனி, $A = I_m A$ எனக்கொண்டால், மேற்குறிப்பிட்ட கோட்பாட்டின்படி A-ல் நிகழ்த்தவேண்டிய ஒவ்வொரு நிரை மாற்றமும் முன் பெருக்கலணி I_m-ல் நிகழ்த்துவதன் மூலம் கிடைக்கப்பெறலாம். அதாவது, A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியில் செய்யப்படும் எந்தவொரு ஆதார நிரை மாற்றமும், அவ்வணியை இம்மாற்றங்களையொத்த I_m என்ற $m \times m$ ஆதார அணியால் முன்பெருக்கம் செய்து கிடைக்கப்பெறும்.

இவ்வாறே, $A = AI_n$ என்பதால், A-ல் நிகழ்த்தவேண்டிய எந்தவொரு ஆதார நிரல் மாற்றமும் இம்மாற்றங்களையொத்த I_n என்ற $n \times n$ ஆதார அணியால் பின் பெருக்கம் செய்து கிடைக்கப்பெறும்.

3-8. தொடக்க அணியின் நேர்மாறு அணி

ஓர் அலகு அணி I-ல் i, j-வது நிரைகளை இடம் மாற்றுவதன் மூலம் கிடைக்கப்பெறும் அணி E_{ij} என்க. $E_{ij} = A$ என்க.

பின், 3.7-ன்படி,

$$E_{ij}.\ A = I$$

$$\therefore\ E_{ij}.\ E_{ij} = I$$

எனவே, நேர்மாறு அணியின் வரையறையின்படி,

$$(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$$

எனவே, E_{ij}-ன் நேர்மாறு அணி E_{ij} அணியேயாகும்.

மீண்டும், $\lambda\ E_i$ என்பது அலகு அணி I-ன் i-வது நிரையை λ-ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணி, A என்க. A-ஐ மீண்டும் $\bar{\lambda}'\ E_i$ செயலுக்கு உட்படுத்த I அணி கிடைக்கப் பெறுவோம்.

பின், 3.7-ன்படி,

$$\lambda'\ E_i\ A = I$$

$$\therefore\ \bar{\lambda}'\ E_i.\ \lambda\ E_i = I$$

என்வே, $(\lambda\ E_i)^{-1} = (\bar{\lambda}'\ E_i)$ (வரையறையின்படி).

இவ்வாறே, $[E_{ij}\ (\lambda)]^{-1} = E_{ij}\ (-\lambda)$

$$[E'_{ij}\ (\lambda)]^{-1} = E'_{ij}\ (-\lambda)$$

என நிறுவலாம்.

மேலும், தொடக்க அணியினது நேர்மாறு அணி அதே போன்ற ஓர் அணியேயாகும்.

3-9. தேற்றம்

P, Q என்ற பூச்சியமில் கோவை அணிகள் இரண்டு $PAQ = B$ என்ற முறையில் இருந்தால் மட்டுமே *A, B* அணிகள் இணைமாற்று அணிகளாகும்.

நிரூபணம்

A, B என்பவை இரு இணைமாற்று அணிகள் என்க. *A*-ன் ஒவ்வொரு நிரை மாற்றமும் ஒத்த தொடக்க மாற்றத்தினுல் *A*-ன் முன் பெருக்கத்திற்குச் சமானமாகும். மேலும், *A*-ன் ஒவ்வொரு நிரல் மாற்றமும் ஒத்த தொடக்க மாற்றத்தின் *A*-ன் பின் பெருக்கத் திற்குச் சமானமாகும்.

நிரை மாற்றங்களின் ஒத்த தொடக்க அணிகள் $P_1, P_2, \ldots, P_r$ எனவும் நிரல் மாற்றங்களது ஒத்த தொடக்க அணிகள் $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad P_r P_{r-1} \ldots P_2 P_1 A Q_1 Q_s \ldots Q_s = B$$

$$(\text{அ}) \quad PAQ = B \,, \qquad P = P_1 P_2 \ldots P_r$$

$$Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_s$$

ஒவ்வொரு தொடக்க மாற்றமும் பூச்சியமில் கோவை அணியாதலின் *P, Q* இரண்டும் பூச்சியமில் கோவை அணிகளாகும்.

3-10. தேற்றம்

ஒவ்வொரு பூச்சியமில் கோவை சதுர அணியும் தொடக்க அணிகளது பெருக்கமாக விளக்கப்படக்கூடும்.

நிரூபணம்

n தரமுடைய ஒரு சதுர அணி *A* என்க.

$$\therefore \quad PAQ = I_n, \qquad P = P_r P_{r-1} \ldots P_1$$

$$Q = Q_1 Q_2 \quad \ldots Q_s$$

$P_1, \ldots, P_r;\ Q_1, Q_2, \ldots Q_s$ தொடக்க அணிகளாம்.

$$\overline{P}' = (P_r P_{r-1} \ldots \overline{P_1})'$$

$$= \overline{P}_1' \overline{P}_2' \ldots \overline{P_{r-1}}' \overline{P}_r'$$

$$\bar{Q}' = \overline{(Q_1 Q_2 \ldots Q_s)}'$$
$$= \overline{Q_s}' \; \overline{Q_{s-1}}' \ldots Q_2' \; \overline{Q_1}'$$
$$PAQ = I_n$$

என்பதை $\bar{P}'$-ஆல் முன்பெருக்கம் செய்யின்,

$$\bar{P}' (PAQ) = \bar{P}' I_n$$
$$\therefore \; (\bar{P}' P) A Q = \bar{P}' \quad (\because \bar{P}' I_n = \bar{P}')$$
$$I_n A Q = \bar{P}' \quad (\because \bar{P}' P = I_n)$$
$$\therefore \quad A Q = \bar{P}'$$

அடுத்து இருபுறமும் பின்பெருக்கம் $\bar{Q}'$ - ஆல் செய்யின்,

$$(AQ) \bar{Q}' = \bar{P}' \bar{Q}'$$
$$A (Q \bar{Q}') = \bar{P}' \; \bar{Q}'$$
$$AI_n = \bar{P}' \bar{Q}'$$
$$\therefore A = \bar{P}' \; \bar{Q}'$$

$$(\text{அ-து}) \; A = \bar{P}'_1 \; \bar{P}'_2 \ldots \bar{P}'_r \; \bar{Q}'_s \; \bar{Q}'_{s-1} \; \ldots \; \bar{Q}'_1$$

3-11. தொடக்க அணிகளிலிருந்து நேர்மாறு அணி காணுதல்

A ஒரு பூச்சியமில் கோவை சதுர அணி என்க.

$$\therefore \; P A Q = I_n$$
$$P = P_r P_{r-1} \ldots P_2 P_1; \quad Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_s.$$
$$\therefore \; A = \bar{P}' \bar{Q}'$$
$$= \bar{P}'_1 \bar{P}'_2 \ldots \bar{P}'_r \; \bar{Q}'_s \; \bar{Q}'_{s-1} \ldots \bar{Q}'_2 \; \bar{Q}'_1$$

எனவே, $\bar{A}' = \overline{(\bar{P}' \; \bar{Q}')}'$
$$= \overline{(\bar{Q}')}' \; \overline{(\bar{P}')}'$$
$$= Q P$$
$$= Q_1 Q_2 \ldots Q_s . P_r P_{r-1} \ldots P_2 P_1.$$

குறிப்பு :

A அணியின் நேர்மாறு அணியினைக் காண, முதலில்

$$A = I A$$

என எழுதி,

A-ஐயும் முன்காரணி I-ஐயும் பல்வேறு தொடக்க மாற்றங்களுக்குட்படுத்தி,

$$I = BA$$

என்ற முறையில் கொணரவேண்டும்.

பின் B என்பது A-ன் நேரெதிர் அணியாகும்.

மாதிரி–4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் நேரெதிர் அணி காண்க.

நிரூபணம்

$$A = I_3 A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_{21}(-2)$ என்ற மாற்றத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2(-1)$ என்ற தொடக்கமாற்றத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_{32}(-1)$ என்ற தொடக்கமாற்றத்தினால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_3(-\frac{1}{4})$ என்ற தொடக்கமாற்றம்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} A$$

$R_{23}(-6)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} A$$

$R_{13}(-3)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} A$$

$R_{12}(-2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} A$$

$I = BA$ என்க.

$$\therefore B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ என்பது A-ன் நேரெதிர்

அணியாகும்.

3–12. தொடக்கமாற்றங்கள் ஓர் அணியின் அளவை மாற்றுது

ஓர் அணியில் இரு நிரைகள் அல்லது இரு நிரல்கள் இடம் மாறினுல் அணியினது அணிக்கோவையின் குறி மாறும். மேலும், ஓர் அணியின் யாதாமொரு நிரை அல்லது நிரலை ஒரு பூச்சியமில் எண் λ-ஆல் பெருக்க, அணிக்கோவையும் λ-ஆல் பெருக்கப்படும். எனவே, முதல் இரு தொடக்க மாற்றங்களால் அணி அளவை மாருது என்பது தெளிவு. இவ்வாறே மூன்றுவது தொடக்க மாற்றமும் அணி அளவை மாற்றுது என நிறுவலாம்.

3–13. அணியின் நியம வடிவம் (Canonical form or normal form)

ஒவ்வொரு $m \times n$ அணியும் தொடக்க மாற்றங்களால் (elementary operations) பின் வரும் வடிவங்களில் யாதாமொன்றுக ஒடுக்கப்படக்கூடும்.

$$[I_r, 0], \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, [I_r], \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது அணியின் நியமவடிவம் எனப்படும்.

A என்ற ஓர் அணி நியமவடிவில் ஒடுக்கப்படின், அதன் அணி அளவை I_r ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

ஒரு 4×3 அணியில்,

$$\begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஒரு 3×4 அணியில்,

$$[I_3, 0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

மாதிரி–5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை நியமவடிவில் ஒடுக்கி, அதன் அணி அளவைக் காண்க.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 (\frac{1}{2}),\ R_2 (\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3-R_1,\ R_4-R_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2-2R_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2+C_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_3-3C_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_{24}}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_4+3R_2}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}\underset{C_3+C_2}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4-C_2}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}\underset{R_2(-1)}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_{34}}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{3}C_3}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\underset{C_4+8C_3}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற நியம வடிவில் உள்ளது.

எனவே, அணி அளவை 3 ஆகும்.

பயிற்சி 3–1

1. தொடக்கமாற்றங்களால் பின் வரும் அணிகளது நேர் மாறு அணிகள் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

{ விடைகள்: (i) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ }

2. தொடக்க நிரை மாற்றங்களுக்குட்படுத்தி பின்வரும் அணியினது நேர்மாறு அணி காண்க.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

{ விடை: $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ }

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ எனின், $BA = I$ என்ற முறையில் உள்ள B அணியைக் காண்க.

{ விடை: $\frac{1}{167}\begin{bmatrix} 87 & -2 & 9 \\ -70 & -2 & 9 \\ -33 & 17 & 2 \end{bmatrix}$ }

4. பின் வரும் அணிகளது நேர்மாறு அணிகளைக் காண்க.

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$

(ii) $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

{ விடைகள்: (i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்,

A அணியின் அணி அளவைக் காண்க.

[விடை : $\rho(A) = 2$]

6. பின் வரும் அணிகளது அணி அளவைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$

[விடைகள் : (i) 2 (ii) 1 (iii) 3]

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A + B$, AB அணிகளது அணி அளவைகள் காண்க.

[விடைகள் : $\rho(A+B) = 2$, $\rho(AB) = 1$]

8. பின்வரும் அணிகளை நியம வடிவில் ஒடுக்கி அணி அளவைகள் காண்க.

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

[விடைகள் : (i) 3 (ii) 2]

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ எனின்,

A, B, $A+B$, AB, BA அணிகளது அணி அளவைகளை சிற்றணிக்கோவைகள் மூலம் காண்க.

[விடைகள் : $\rho\ (A) = 2$, $\rho\ (B) = 1$, $\rho\ (A+B) = 2$, $\rho\ (AB) = 0$, $\rho\ (BA) = 1$]

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

என்றவாறு உள்ள பூச்சியமில் கோவை அணிகள் P, Q காண்க.

$$\left\{ \text{விடை}: P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (Linear Equations)

3–14. சமபடியில்லாத ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் (non–homogeneous linear equations)

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n &= b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n &= b_2 \\ \dots\dots \qquad & \dots\dots \\ \dots\dots \qquad & \dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \dots\, a_{mn}\, x_n &= b_m \end{aligned}$$

என்பவை x_1, x_2, ..., x_n என்ற மாறிகளில் m சமன்பாடுகளாகும்.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & & \dots\dots & \\ \dots\dots & & \dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ எனின்,

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை

$$A X = B$$

என்ற அணி வடிவில் எழுதலாம்.

A அணி கெழு அணி (Coefficient matrix) எனப்படும்.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & & \dots\dots & & \\ \dots\dots & & \dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

என்ற அணி மிகுதிபடுத்திய அணி (augmented matrix) எனப்படும். இதன் அணித்தரம் $[m \times (n+1)]$ ஆகும். இவ்வணியை (A, B) எனக் குறியிடுவது மரபு.

3–15. பொருத்தமுடைய சமன்பாடு (Consistent equations)

$A X = B$ என்ற அணி சமன்பாட்டிற்கு ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுகள் இருப்பின், அவை பொருத்தமுள்ள சமன்பாடுகள் எனவும், மற்றவை பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் (Inconsistent equations) எனவும் கூறப்படும். பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு இருப்பின், அவை ஒரே முறை தீர்வு (unique solution) கொண்டவை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$ என்ற ஒரே முறைத் தீர்வு உண்டு.

(ii) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 6x + 9y &= 15 \end{aligned}\right\}$

என்ற சமன்பாடுகளில் இரண்டாவது சமன்பாடு முதல் சமன்பாட்டிற்குச் சமானமானதாகும்.

$$(\text{அ-து})\quad 2x + 3y = 5$$

$$\therefore\quad x = k \quad \text{எனின்,} \quad y = \frac{5-2k}{3}$$

k-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு y-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே, இச்சமன்பாடுகளுக்கு முடிவிலி தீர்வுகள் (Infinite number of solutions) உண்டு.

மேற்குறிப்பிட்ட இருவகை சமன்பாடுகளும் பொருத்த முடைய சமன்பாடுகளாகும்.

(iii) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}\right\}$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொண்டால்,

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து $x + 2y = 3$ எனக் கிடைக்கப்பெறும்.

$$\therefore\quad x + 2y = 5$$

$$x + 2y = 3 \quad \text{என்றாகிறது.}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலும் ஒரே சமயத்தில் பொருந்தும் தீர்வுகள் கிடையாது. இவை பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

3–16. n மாறிகளில் n சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots \qquad\qquad & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \qquad\qquad & \ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots\ldots + a_{nn} x_n &= b_n, \ n \text{ சமன்பாடுகள்.} \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

எனின், சமன்பாடுகளது அணி சமன்பாடு

$$AX = B \text{ ஆகும்.}$$

இனி, இச் சமன்பாடுகளது தீர்வு காண்போம்.

செய்முறை 1 (Crammer's rule–கிராமரின் விதி)

$|A| \neq 0$ என்க.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots + a_{3n} x_n = b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots\ldots + a_{nn} x_n = b_n$$

என்ற n சமன்பாடுகளில்,

$[a_{ij}]$ என்ற கெழு அணி (Coefficient Matrix) A எனவும், a_{ij} மூலகத்தின் இணைக்காரணி A_{ij} எனவும் கொள்வோம்.

முதலாவது, இரண்டாவது, ... n-வது சமன்பாடுகளை முறையே $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}$ என்ற இணைக்காரணிகளால் பெருக்கிக் கூட்டினால்,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} A_{i2} x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{in} A_{in} x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1}$$

என்றாகும்.

$$\therefore \ |A|\, x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1| \quad (\text{என்க})$$

$$\therefore \ x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}.$$

அடுத்து, முதலாவது, இரண்டாவது, ..., n-வது சமன்பாடுகளை முறையே $A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{n2}$ ஆகியவற்றால் பெருக்கிக் கூட்டினால்,

$$|A| \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2| \ (\text{என்க})$$

$$\therefore \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

இவ்வாறே தொடர்ந்து கடைசியாக, முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, ... , n-வது சமன்பாடுகளை முறையே $A_{1n}, A_{2n}, \ldots, A_{nn}$ ஆகியவற்றால் பெருக்கிக் கூட்ட

$$|A|\,x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3(n-1)} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n4} & \ldots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}$$

$$= |A_n| \qquad \text{(என்க)}$$

என்றாகும்.

எனவே, $x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|}$.

$$\therefore\ x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ \ldots, \ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

செய்முறை 2 (நேர்மாறு அணி மூலம் தீர்வு காணுதல்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$AX = B.$

$|A| \neq 0$ எனின், A-க்கு நேர்மாறு அணி $\overline{A}'$ உண்டு.

$$\therefore\ \overline{A}'(AX) = \overline{A}'B$$

(அ-து) $(\overline{A}'A)\,X = \overline{A}'B$

$$I\,X = \overline{A}'B \qquad (\because\ \overline{A}'A = I)$$

$$\therefore\ X = \overline{A}'B. \qquad (\because\ I\,X = X)$$

(அ-து) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \overline{A}' \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$

இங்கு $\overline{A}' = \dfrac{(\text{சேர்ப்பு } A)}{|A|}$ என்ற விதியைக் கையாண்டு $\overline{A}'$-ஐக் காணலாம்.

மாதிரி–1

பின் வரும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

$$x + 2y + z = 8$$
$$2x - 3y + 2z = 2$$
$$3x + y + 2z = 11.$$

நிரூபணம்

செய்முறை 1 (Crammer's rule–கிராமரின் விதி).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $AX = B$ என்பது அணி சமன்பாடு.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-6-2) - 2(4-6) + 1(2+9)$$
$$= -8 + 4 + 11 = 7 \neq 0.$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8(-6-2) - 2(4-22) + 1(2+33)$$
$$= -64 + 36 + 35$$
$$= 7$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-22) - 8(4-6) + 1(22-6)$$
$$= -18 + 16 + 16$$
$$= 14$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 1(-33-2) - 2(22-6) + 8(2+9)$$
$$= -35 - 32 + 88$$
$$= 21$$

$$\therefore x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{14}{7} = 2$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{21}{7} = 3$$

எனவே, தீர்வு: $x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

செய்முறை 2

$$|A| = 7 \neq 0.$$

$|A|$ -ன் இணைக்காரணிகள்,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8,\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11,\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7,\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

எனவே, $|A|$ -ன் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணி

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 11 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ (சேர்ப்பு } A) = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \overline{A}' = \frac{(\text{சேர்ப்பு } A)}{|A|} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = \overline{A}' B$ ஆதலின்,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 64 - 6 + 77 \\ 16 - 2 + 0 \\ 88 + 10 - 77 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

என்வே, $x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

3-17. தேற்றம்

$$X_1 = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}]$$
$$X_2 = [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}]$$
$$X_m = [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}]$$

என்ற m வெக்டர்களால் அமையும் A என்ற ஒரு $m \times n$ அணியின் $(m<n)$ அணி அளவை r எனின், $(r<m)$, A அணியில் ஒருபடிச் சார்பற்ற வெக்டர்களது எண் r ஆகும். மீதியுள்ள வெக்டர்கள் எண் $(m-r)$. இவை மற்ற r வெக்டர்களது ஒரு படிச் சேர்க்கையாகும்.

நிரூபணம்

A அணியின் r என்க.

எனவே, A அணியில் r தரம் கொண்ட பூச்சியமில் சிற்றணிக் கோவை குறைந்தது ஒன்றுவது இருக்கும். இக்கோவை அணியினது இடதுபுற மேல் முனையில் இருக்குமாறு கொள்ளலாம். இதை Δ_1 என்க.

அதாவது, $$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$ எனின்,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{vmatrix}_{r \times r} \neq 0$$

Δ_1-ல் சேராத எஞ்சிய நிரைகளில் ஒன்றையும் நிரல்களில் ஒன்றையும் Δ_1-ல் சேர்ப்பின் கிடைக்கும் அணி Δ_2 என்க.

$$(\text{அ-து}) \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1s} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rs} \\ x_{t1} & x_{t2} & \cdots & x_{tr} & x_{ts} \end{bmatrix}_{(r+1)\times(r+1)} = 0.$$

Δ_2 அணியில் $x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ts}$ என்ற கடைசி நிரலின் மூலகங்களது இணைக்காரணிகள்,

$A_{1s}, A_{2s}, \ldots, A_{rs}, A_{ts}$ எனின்,

$A_{ts} = \triangle_1 \neq 0.$

மேலும், ஒரு சதுர அணியில் ஒரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களை வேறொரு நிரையிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களின் இணைக்காரணிகளால் பெருக்கிக் கூட்டிய தொகை பூச்சியமாம்.

$$\therefore \quad x_{11} A_{1s} + x_{21} A_{2s} + \ldots + x_{r1} A_{rs} + x_{t1} A_{ts} = 0$$
$$x_{12} A_{1s} + x_{22} A_{2s} + \ldots + x_{r2} A_{rs} + x_{t2} A_{ts} = 0$$
$$\ldots \quad \ldots \qquad \qquad \ldots\ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \qquad \qquad \ldots \quad \ldots$$
$$x_{1r} A_{1s} + x_{2r} A_{2s} + \ldots + x_{rr} A_{rs} + x_{tr} A_{ts} = 0$$

மேலும்,

$$x_{1s} A_{1s} + x_{2s} A_{2s} + \ldots + x_{rs} A_{rs} + x_{ts} A_{ts} = \triangle_2 = 0 \qquad \text{——} (1)$$

$\triangle_1$-ல் இல்லாத எஞ்சிய $(n-r)$ நிரல்களில் யாதாமொன்றே $\triangle_2$-ன் கடைசி நிரலாகும்.

$\therefore$ சமன்பாடு (1) எஞ்சிய $(n-r)$ நிரல்களில் ஒவ்வொரு நிரலுக்கும் பொருந்தும்.

எனவே,

$$x_{11} A_{1s} + x_{21} A_{2s} + \ldots + x_{r1} A_{rs} + x_{t1} A_{ts} = 0$$
$$x_{12} A_{1s} + x_{22} A_{2s} + \ldots + x_{r2} A_{rs} + x_{t2} A_{ts} = 0$$
$$\ldots\ldots \qquad \qquad \ldots\ldots$$
$$x_{1n} A_{1s} + x_{2n} A_{2s} + \ldots + x_{rn} A_{rs} + x_{tn} A_{ts} = 0$$

இவைகளைக் கூட்டின்,

$$A_{1s}(x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{1n}) + A_{2s}(x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n})$$
$$+ \ldots\ldots + A_{rs}(x_{r1} + x_{r2} + \ldots x_{rn}) + A_{ts}(x_{t1} + x_{t2} + \ldots + x_{tn}) = 0$$

(அ-து) $A_{1s} X_1 + A_{2s} X_2 + \ldots + A_{rs} X_r + A_{ts} X_t = 0$

$$A_{ts} = \triangle_1 \neq 0.$$

$$\therefore \quad X_t = -\frac{1}{A_{ts}} [A_{1s} X_1 + A_{2s} X_2 + \ldots + A_{rs} X_r]$$

எனவே, X_t வெக்டரானது $X_1, X_2, \ldots, X_r$ என்ற r வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். X_t என்பது எஞ்சிய $(m-r)$ வெக்டர்களில் யாதேனும் ஒன்றுதலின்,

$X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m$ என்ற வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றும் $X_1, X_2, \ldots, X^r$ என்ற r வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

இனி $X_1, X_2, \ldots, X_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை (Linearly independent) என நிறுவுவோம்.

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ \ldots \\ \ldots \\ X_{ni} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

எனக் கொள்வோம்.

$X_1, X_2, \ldots, X_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை என்க.

$$\therefore \quad \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_r X_r = 0$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் முற்றும் பூச்சியமில் (not all zero) எண்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ உண்டு.

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \ldots + \lambda_r x_{1r} = 0 \\ & \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + \ldots + \lambda_r x_{2r} = 0 \\ & \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ & \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ & \lambda_1 x_{n1} + \lambda_2 x_{n2} + \ldots + \lambda_r x_{nr} = 0 \end{aligned}$$

முதல் r சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\triangle_1 = 0.$$

$\therefore$ கிராமரின் விதிப்படி, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_r = 0.$

இது $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ஒருபடிச் சார்புடையவை என்ற தற்கோளுக்கு எதிரானதாகும். எனவே, $X_1, X_2, \ldots X_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும்.

3-18. தேற்றம்

A, $[A, B]$ என்ற அணிகளது அணி அளவைகள் சமமாயிருந்தால் மட்டுமே $AX = B$ என்ற அணி சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உண்டு.

நிரூபணம்

A அணியின் அணி அளவை r எனக் கொள்வோம். A அணியின் நிரல் வெக்டர்கள் $C_1, C_2, \ldots, C_n$ எனின்,

$AX = B$ சமன்பாடு

$$[C_1 \; C_2 \ldots C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = B \text{ என்றாகும்.}$$

(அ-து), $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n = B$

$AX = B$ சமன்பாடு பொருத்தமுடைய சமன்பாடு என்க.

(அ-து) $AX = B$ சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உண்டு என்க.

$$\therefore \quad B = K_1 C_1 + K_2 C_2 + \ldots + K_n C_n.$$

A-ன் அணி அளவை r ஆதலின், மீதியுள்ள $(n-r)$ நிரல்கள் $C_{r+1}, C_{r+2}, \ldots, C_n$ ஒவ்வொன்றும் $C_1, C_2, \ldots, C_r$ இவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும், எனவே, B அணி, $C_1, C_2, \ldots C_r$ நிரல்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாகும்.

எனவே, $[A, B]$ அணியிலும் ஒருபடிச் சார்பற்ற நிரல்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை r ஆகும்.

$\therefore$ $[A, B]$ அணியின் அணி அளவை r ஆகும். (அ-து) A, $[A, B]$ என்ற இரு அணிகளது அளவைகள் சமமாகும்.

அடுத்து, A, $[A, B]$ அணிகளது அணி அளவைகள் சமமெனக் கொள்வோம். அணி அளவை r எனின், $[A, B]$ அணியிலுள்ள ஒருபடிச்சார்பற்ற நிரல்கள் r ஆகும். ஆனால், $[A, B]$ அணியிலுள்ள $C_1, C_2, \ldots, C_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாம். எனவே, B அணி $C_1, C_2, \ldots, C_r$ ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். ஆகவே, அனைத்தும் பூச்சியமில் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ எனும் r மாறிலிகள் உண்டு.

$$\therefore \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_r C_r + 0.\, C_{r+1} + \ldots + 0.\, C_n = B.$$

இச்சமன்பாட்டை

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n = B$$

என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடின்,

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_r = \lambda_r,$$
$$x_{n+1} = 0, x_{n+2} = 0, \ldots, x_n = 0 \quad \text{என்றாகும்.}$$

எனவே, $AX = B$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உண்டு.

(அ-து) $AX = B$ ஒரு பொருத்தமுடைய சமன்பாடாகும்.

மாதிரி-2

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

$$x + y + z = 5$$
$$2x + 3y + 4z = 4$$
$$2x + y + z = 6.$$

நிரூபணம்

அணி சமன்பாடு $AX = B$.

(அ-து) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-4) - 1(2-8) + 1(2-6) = -1+6-4 = 1 \neq 0,$$

$$\therefore |A| \neq 0.$$

எனவே, $\rho(A) = 3$.

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-2R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_1+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \underset{R_3+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4-C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \underset{C_4+3C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_3-2C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \underset{C_4+7C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே, $[A, B]$ என்ற மிகுதிபடுத்திய அணியின் அணி அளவை 3.

அணி A, அணி $[A, B]$ என்ற ஆகியவற்றின் அணி அளவுகள் சமமாதலின், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய (consistent equations) சமன்பாடுகளாகும்.

மாதிரி–3

பின் வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} 2x + 3y \quad &= 7 \\ 5x + 4y + z &= 9 \\ 4x + 6y \quad &= 3 \end{aligned}$$

நிரூபணம்

அணிச்சமன்பாடு $AX = B$ எனின்,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 - R_1$, $R_3 - 2R_1$, என்ற மாற்றங்களால் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{aligned} 2x + 3y \quad &= 7 \\ 3x + y + z &= 2 \\ 0x + 0y + 0z &= -11 \end{aligned}$$

கடைசி சமன்பாட்டிலிருந்து $0 = -11$ என்றாகிறது. இது பொருத்தமற்றது. எனவே, சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் ஆகும்.

பயிற்சி 3–2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகள் என நிறுவி, அவற்றை விடுவி.

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 3z + t &= 9 \\ x + 2y + z + t &= 2 \\ 3x + 4y + 2z - t &= 8 \\ 2x + 3y + 4z + 5t &= 5 \\ x - y + z - t &= 4 \end{aligned}$$

[விடை: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $t = -1$.]

2. பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகள் என் நிறுவி, அவற்றை விடுவி.

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z + 9 &= 0 \\ 3x - y + 2z - 5 &= 0 \\ 2x + 3y - z - 3 &= 0 \\ 4x - 5y + z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

[விடை : $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2},\ z = \frac{5}{2}$].

3. பின்வருபவை பொருத்தமற்ற (Inconsistent) சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} x + y + 2z + t &= 5 \\ 2x + 3y - z - 2t &= 2 \\ 4x + 5y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x + 6y + 11 &= 0 \\ 6x + 20y - 6z + 3 &= 0 \\ 6y - 18z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

என்பவை பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

5.
$$\begin{aligned} x - 4y + 7z &= 14 \\ 3x + 8y - 2z &= 13 \\ 7x - 8y + 26z &= 5 \end{aligned}$$

என்பவை பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகளா, இல்லையா என்பதைக் காண்க.

[விடை: பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள்]

6. λ, μ-ன் எம்மதிப்புகளுக்குப் பின்வரும் சமன்பாடுகள்

(i) ஒரே வகைத் தீர்வு, (ii) முடிவிலி தீர்வுகள்,

(iii) தீர்வுகளற்று, இருக்கும்?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 6 \\ x + \lambda y + 3z &= \mu \end{aligned}$$

[விடை: (i) $\lambda \neq 5$ (ii) $\lambda = 5,\ \mu = 9$ (iii) $\lambda = 5,\ \mu \neq 9$].

7. λ-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு

$$\begin{aligned} 3x - y + \lambda z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y - \lambda z &= -1 \end{aligned}$$

என்ற சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளாகும்.

8. λ, μ-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

என்ற சமன்பாடுகள்

(i) ஒரே முறைத் தீர்வு, (ii) முடிவிலி தீர்வுகள்,

(iii) தீர்வுகளற்று, இருக்கும்?

[விடை: (i) $\lambda \neq 3, \mu \neq 10$ (ii) $\lambda = 3, \mu = 10$ (iii) $\lambda = 3, b \neq 10$]

9. பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடையவையா, அல்லவா என ஆராய்க.

(i)
$$x + 2y - z = 4$$
$$2x + 4y + z = 5$$
$$x + 2y + 6z = -7$$

(ii)
$$x + y - 2z + u + 3t = 1$$
$$2x - y + 2z + 2u + 6t = 2$$
$$3x + 2y - 4z - 3u - 9t = 3$$

(iii)
$$x + y + z = 4$$
$$2x + 5y - 2z = 3$$
$$x + 7y - 7z = 5$$

[விடை: (i) பொருத்தமுடையவை (ii) பொருத்தமுடையவை (iii) பொருத்த மற்றவை.]

4. வெக்டர் வெளி

(Vector Space)

4-1. வெக்டர்களது ஒருபடிச் சார்பு—வரையறை (Linear dependance of vectors)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை களம் F-ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டர் தொகுதி (set of vectors) என்க. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்பவை F-ல் உள்ள முற்றும் பூச்சியமற்ற (not all zero) எண்கள் என்போம். பின்,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$$

எனும் சமன்பாட்டில் அவ்வெக்டர்கள் பொருந்துமெனின், அவை ஒருபடிச் சார்புடைய வெக்டர்கள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3) என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிரூபி.

$$x_1 = (1, 0, 0), \quad x_2 = (0, 1, 0)$$
$$x_3 = (0, 0, 1), \quad x_4 = (1, 2, 3) \text{ என்க.}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 வெக்டர்கள்

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்துமாறு a_1, a_2, a_3, a_4 என்ற அனைத்தும் பூச்சியமற்ற திசையிலிகள் (scalars) F-ல் இருக்குமெனின், அவ்வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை.

$a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -3$, $a_4 = 1$ என்ற மதிப்புகளுக்கு
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$

என்றாகும்.

$\because \; a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$
$= -1\,(1,0,0) - 2\,(0,1,0) - 3\,(0,0,1) + 1\,(1,2,3)$
$= (-1,0,0) + (0,-2,0) + (0,0,-3) + (1,2,3)$
$= (-1+1, -2+2, -3+3)$
$= (0, 0, 0)$
$= 0$

எனவே, x_1, x_2, x_3, x_4 வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை.

2. V3 (F)-ல் உள்ள (1,2,3), (4,1,5) (−4,6,2) என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிரூபி.

$x_1 = (1,2,3),\; x_2 = (4,1,5),\; x_3 = (-4,6,2)$ என்க.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad a_1, a_2, a_3, \in F$
$\Rightarrow \; a_1 (1,2,3) + a_2 (4,1,5) + a_3 (-4,6,2) = (0, 0, 0)$
$\Rightarrow \; (a_1 + 4a_2 - 4a_3,\; 2a_1 + a_2 + 6a_3,\; 3a_1 + 5a_2 + 2a_3) = (0, 0, 0)$
$\therefore \; a_1 + 4 a_2 - 4 a_3 = 0$
$2a_1 + a_2 + 6 a_3 = 0$
$3a_1 + 5a_2 + 2a_3 = 0$

இவற்றில் a_1 -ஐ நீக்க, $7 a_2 - 14 a_3 = 0$

$\therefore \; a_2 = 2 a_3, \qquad a_1 = -4 a_3$

$a_3 = 1$ எனக் கொண்டால்,

$a_1 = -4, \; a_2 = 2, \; a_3 = 1.$

(அ-து) (1, 2, 3), (4, 1, 5), (−4, 6, 2) என்ற வெக்டர்கள் $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்துமாறு $a_1 = -4,\; a_2 = 2,\; a_3 = 1$ என்ற மூன்று திசையிலிகள் உள்ளன.

எனவே, கொடுத்துள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை.

4–2. ஒருபடிச் சார்பற்ற வெக்டர்கள் (Linear Independance of vectors)

கணம் F-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற வெக்டர் தொகுதி

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0,\; a_i \in F$ என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்தும் போது $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்ற அனைத்து திசையிலிகளும் பூச்சியமெனின், அவ்வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. வெறுமை கணம் ϕ, ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாகும்.

2. (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிரூபி.

$x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1)$ என்க.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 (1, 0, 0), + a_2 (0, 1, 0), + a_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0.$$

$\therefore$ x_1, x_2, x_3 வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாம்.

3. $\mathbf{x}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{x}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{x}_3 = (0,0,1)$, $\mathbf{x}_4 = (1,1,1)$ என்ற வெக்டர்களில் யாதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிரூபி.

யாதேனும் மூன்று வெக்டர்கள் x_1, x_3, x_4 என்க.

$$a_1 x_1 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 (1, 0, 0) + a_3 (0, 0, 1) + a_4 (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1, 0, 0) + (0, 0, a_3) + (a_4, a_4, a_4) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1 + a_4,\ a_4,\ a_3 + a_4) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow a_1 + a_4 = 0,\ \ a_4 = 0,\ \ a_3 + a_4 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 = 0,\ \ a_3 = 0,\ \ a_4 = 0$$

$\therefore$ x_1, x_3, x_4 வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவையல்ல.

மீண்டும், நான்கு வெக்டர்களும் ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிறுவலாம்.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 (1,0,0) + a_2 (0,1,0) + a_3 (0,0,1) + a_4 (1,1,1) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) + (a_4, a_4, a_4) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (a_1 + a_4,\ a_2 + a_4,\ a_3 + a_4) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow a_1 + a_4 = 0, a_2 + a_4 = 0, a_3 + a_4 = 0$$
$$\therefore\ a_1 = a_2 = a_3 = -a_4 = K \text{ (என்க)}$$

$$\therefore\ K x_1 + K x_2 + K x_3 - K x_4 = 0$$

(அ-து) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$

(அ-து) x_1, x_2, x_3, x_4 வெக்டர்கள்,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்துமாறு $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$ என்ற திசையிலிகள் உள்ளன.

எனவே, நான்கு வெக்டர்களும் ஒருபடிச் சார்புடையவை.

4. (1,1,0,0), (0,0,0,3), (0,1,0,0) வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிறுவுக.

$$a_1(1, 1, 0, 0) + a_2(0, 0, 0, 3) + a_3(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (a_1, a_1, 0, 0) + (0, 0, 0, 3a_2) + (0, a_3, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$$

∴ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை.

5. 2×3 அணிகள் கொண்ட வெக்டர் வெளி V(R) எனின், $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$aA + bB + cC$$

$$= a\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4a+2b+c & a-b-c & 2a-b-3c \\ a+3b-2c & -2a+2b+0c & 3a+4b+5c \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad aA+bB+cC = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+2b+c & a-b-c & 2a-b-3c \\ a+3b-2c & -2a+2b+0c & 3a+4b+5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \qquad a + 3b - 2c = 0$$

$$a - b - c = 0 \qquad -2a + 2b = 0$$

$$2a - b - 3c = 0 \qquad 3a + 4b + 5c = 0$$

இவற்றை விடுவிப்பின்,

$$a = 0, \; b = 0, \; c = 0$$

எனவே, A, B, C அணிகள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை.

4-3. ஒருபடிச் சேர்மானம் (Linear Combination)

x எனும் யாதேனும் ஒரு வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக விவரிக்கப்பெறுமெனின், அதாவது,

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \text{ எனின்,}$$

x வெக்டர் ஏனைய கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. (2 − 1, 1) வெக்டரை (2, 1, 3), (1, 1, 2) என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக வெளியிடு.

$x = (2, -1, 1),$
$x_1 = (2, 1, 3),\ x_2 = (1, 1, 2)$ **என்க.**
$x = a_1 x_1 + a_2 x_2$ எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \therefore\quad (2, -1, 1) &= a_1 (2, 1, 3) + a_2 (1, 1, 2) \\ &= (2a_1, a_1, 3a_1) + (a_2, a_2, 2a_2) \\ &= (2a_1 + a_2, a_1 + a_2, 3a_1 + 2a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad 2a_1 + a_2 &= 2 \quad (1) \\ a_1 + a_2 &= -1 \quad (2) \\ 3a_1 + 2a_2 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

இச்சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்,

$$a_1 = 3,\ a_2 = -4.$$

$$\therefore\quad (2, -1, 1) = 3\,(2, 1, 3) - 4\,(1, 1, 2).$$

2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை எனின், அவற்றுள் ஒன்று மற்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக விளக்கலாம் என நிரூபி.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை எனின்,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டில் வெக்டர்கள் பொருந்துமாறு அனைத்துப் பூச்சியமற்ற திசையிலிகள் $a_1, a_2, \ldots, a_n$, F-ல் இருக்கும்.

$a_1 \neq 0$ என்க.

சமன்பாடு (1) -ஐ a_1 -ஆல் வகுப்பின்,

$$x_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right) x_2 + \left(\frac{-a_3}{a_1}\right) x_3 + \ldots + \left(\frac{-a_n}{a_1}\right) x_n.$$

மேலே கிடைக்கும் சமன்பாட்டிலிருந்து x வெக்டர் மற்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானம் என்பது தெளிவாகிறது.

3. (2, − 5, 3) வெக்டர் (1, − 5, 7), (1, − 3, 2), (2, − 4, − 1) என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக விளக்கப்பட இயலாது என காண்பி.

$x = (2, -5, 3),\quad x_1 = (1, -5, 7)$
$x_2 = (1, -3, 2),\quad x_3 = (2, -4, -1)$ என்க.

$x = ax_1 + bx_2 + cx_3$, $a, b, c \in F$ என்க.

(அ-து) $(2, -5, 3) = a(1, -5, 7) + b(1, -3, 2) + c(2, -4, -1)$
$= (a, -5a, 7a) + (b, -3b, 2b) + (2c, -4c, -c)$
$= (a+b+2c, -5a-3b-4c, 7a+2b-c)$

$$\therefore \quad a+b+2c = 2 \quad (1)$$
$$+5a+3b+4c = 5 \quad (2)$$
$$7a+2b-c = 3 \quad (3)$$

(2)–வது சமன்பாட்டிலிருந்து சமன்பாடு (1)–ன் மும்மடங்கைக் கழிப்பின்,

$$2a - 2c = -1 \qquad \therefore \quad a - c = -\tfrac{1}{2} \quad (4)$$

(3)–வது சமன்பாட்டுடன் சமன்பாடு (1)-ன் இருமடங்கைக் கழிப்பின்,

$$5a - 5c = -1 \qquad \therefore \quad a - c = -\tfrac{1}{5} \quad (5)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5)–லிருந்து அவையிரண்டும் முரணை (பொருத்தமற்ற) சமன்பாடுகள் என்பது தெளிவு.

எனவே, x வெக்டர் x_1, x_2, x_3 வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாகாது.

4–4. தேற்றம்

ஒருபடிச் சார்பற்ற கணத்தின் கீழ்கணமும் ஒருபடிச் சார்பற்றவை.

நிரூபணம்

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ வெக்டர்களைக் கொண்ட கணம் S_1 என்க.
$x_1, x_2, \ldots, x_r$ வெக்டர்களைக் கொண்ட கணம் S_2 என்க.

$$(r \leq k)$$

$$\therefore \quad S_2 \subset S_1.$$

கணம் S_1 ஒருபடிச் சார்பற்றது. நாம் S_2 கணமும் ஒரு படிச் சார்பற்றது என நிரூபிப்போம்.

S_1 கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றது ஆதலின்,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k = 0, \; a_i \in F$$
$$\Rightarrow \; a_1 = 0, \; a_2 = 0, \ldots, a_k = 0$$
$$\therefore \; a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r = 0, \quad (r \leq k)$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r + 0\, x_{r+1} \ldots + 0\, x_k = 0$$
$$\Rightarrow \; a_1 = 0, \; a_2 = 0, \ldots, a_r = 0$$

எனவே, கணம் S_2 ஒருபடிச் சார்பற்றதாம்.

4–5. தேற்றம்

x வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற r வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமெனின், $x_1, x_2, \ldots, x_r$, x என்ற $(r+1)$ வெக்டர்களது கணம் ஒருபடிச் சார்புடையவையாம்.

மறுதலையாக, $x_1, x_2, \ldots, x_r$, x என்ற $(r+1)$ வெக்டர்களைக் கொண்ட கணம் ஒருபடிச் சார்புடையவை எனின், x வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots, x^r$ என்ற ஒருபடிச் சார்பற்ற வெக்டர்களது சேர்மானமாகும்.

நிரூபணம்

(i) x வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற r வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாதலின்

$$x = a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots\ a_r\ x_r \quad (1) \quad a_i \in F.$$

$a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_r$ அனைத்தும் பூச்சியமில் திசையிலிகள்.

$x, x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற $(r+1)$ வெக்டர்கள் கொண்ட கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என இனி நிறுவுவோம்.

சமன்பாடு (1)–லிருந்து

$$a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots + a_r\ x_r + (-1)\ x = 0 \quad (2)$$

$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r,\ -1$ என்பவை அனைத்தும் பூச்சியமில் $(r+1)$ திசையிலிகள்.

சமன்பாடு (2)–லிருந்து $x_1, x_1, \ldots, x_r$ என்ற $(r+1)$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவையாம்.

(ii) மறுதலையாக, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r,\ x$ வெக்டர்கள் கொண்ட தொகுதி ஒருபடிச் சார்புடையவை எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_1\ x_4 + a_2\ x_2 + \ldots + a_r\ x_r + a_{r+1}\ x = 0 \quad (3)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$ என்பவை முற்றும் பூச்சியமில் திசையிலிகள்.

$$\therefore \quad -a_{r+1}\ x = a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots + a_r\ x_r.$$

மேலும், $x_1, x_2, \ldots, x_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என்க.

$$\therefore \quad b_1\ x_1 + b_2\ x_2 + \ldots + b_r\ x_r = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \quad b_1 = 0,\quad b_2 = 0,\ \ldots,\ b_r = 0$$

$a_{r+1} = 0$ எனின், சமன்பாடு (3) -லிருந்து

$$a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots + a_r\ x_r = 0$$

இங்கு $a_1, a_2, \ldots, a_r$ என்பவை அனைத்தும் பூச்சியமில் திசையிலிகள். சமன்பாடு (4)-உடன் ஒப்பு நோக்கும்போது இது முரண்பாடென்றுகிறது.

$$\text{எனவே } a_{r+1} \neq 0.$$

ஆகவே, சமன்பாடு (2) -லிருந்து

$$X = \left(\frac{-a_1}{a_{r+1}}\right) x_1 + \left(\frac{-a_2}{a_{r+1}}\right) x_2 + \ldots + \left(\frac{-a^r}{a_{r+1}}\right) x_r$$

$-\frac{a_1}{a_{r+1}}, \ldots, -\frac{a_r}{a_{r+1}}$ என்பவை அனைத்தும் பூச்சியமில் திசையிலிகளாம்.

எனவே, x வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots, x_r$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாகும்.

4-6. வெக்டர் வெளி (Vector Space)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள களம் F எனின், வெறுமையற்ற V எனும் ஒரு கணம் பின்வரும் விதிகளுக்குட்பட்டு ஒரு வெக்டர் வெளி எனப்படும்.

1. $(V,+)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குலம். (Abelian group)

(அ-து) (i) $x, y \in V$ எனின், $x + y \in V$

(ii) $x + y = y + x, \ \forall x, y \in V$ (V-ல் உள்ள அனைத்து x, y வெக்டர்களுக்கும்)

(iii) 0 என்று குறிப்பிடப்படும் பூச்சிய வெக்டர் (zero vector) V-ல்,

$x + 0 = 0 + x = 0$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கும்.

(iv) $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $-x \notin V$ என்ற வெக்டர்

$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கும்.

(v) $x + (y+z) = (x+y) + z, \ \forall x, y, z \notin V.$

2. $x \in V, a \in F \Rightarrow ax \in V$

இவ்விதி பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்படவேண்டும்.

(i) $a(x+y) = ax + ay, \ \forall x, y \in V; a \in F$

(ii) $(a+b)\, x = ax+bx, \ \forall\ x \in V;\ a, b \in F$

(iii) $(ab)\, x = a\,(bx)$

(iv) $1.\ x = x, \ \ x \in V\ ;\ 1 \in F.$

4–7. பூச்சிய வெளி (Null Space)

0 என்ற நேர்மாறு மூலகம் மட்டும் கொண்ட வெக்டர் வெளி பூச்சிய வெளி எனப்படும். இது {0} எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. F ஒரு களம் எனின், F (F) ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

1. F ஒரு களமாதலின் அது ஒரு பரிமாற்று குலமாகும்.

2. களத்தின் மூலகங்கள் பங்கீட்டு விதிக்குட்படுவனவாதலின்

(i) $a\,(x+y) = ax + ay,\ a \in F;\ x, y \in F$

(ii) $(a+b)\, x = ax + bx,\ a,\ b \in F;\ x \in F.$

களத்தின் மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதிக்குட்படுவன வாதலின்,

(iii) $a\,(bx) = (ab)\, x,\ \ a, b \in F;\ x \in F$

(iv) 1 பெருக்கல் சர்வ சம மூலகமாதலின்,

$$1.\ x = x,\ 1 \in F;\ x \in F$$

வெக்டர் வெளியின் விதிகள் யாவும் $F\,(F)$-க்குப் பொருந்துவதால், $F\,(F)$ ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

2. (0,1) இடைவெளியில் வகையிடத்தக்க (அ) தொகையிடத்தக்க அனைத்து மெய்மதிப்பு தொடர் சார்புகளது (real valued continuous functions) கணம் A எனின், A (R) என்பது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டல், திசையிலி பெருக்கல் விதிகளுக்குட்பட்ட ஒரு வெக்டர் வெளி என நிரூபி.

$$\mathbf{(f+g)\,(x) = f\,(x) + g\,(x), \quad \forall\ f, g \in A \quad (1)}$$
$$\mathbf{(a\,f)\,(x) = a\,f\,(x), \quad \forall\ a \notin R;\ f \in A \quad (2)}$$

1. (i) இரு தொடர் சார்புகளது கூட்டுத் தொகை ஒரு தொடர் சார்பாகும். மேலும், இரு மெய்மதிப்புகளது கூட்டுத் தொகையும் ஒரு மெய்மதிப்பாகும்.

எனவே,

$f\,(x) + g\,(x)$

$$= (f + g)\, x \ \ \in A \text{ (1)–ன் படி}, \ \forall\ f, g \in A.$$

(ii) $f, g, h \in A$ எனின்,

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= f(x)+g(x)+h(x)\\ &= f(x)+[g(x)+h(x)]\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= [f+(g+h)](x), \quad x \in (0, 1)\end{aligned}$$

$\because$ $f(x), g(x), h(x)$ ஆகியவை மெய்யெண்கள். மேலும் மெய்யெண்களது கூட்டல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டதாகும்.

$$\therefore \quad (f+g)+h = f+(g+h)$$

(iii) முதலில் $\bar{0}$ எனும் சார்பை

$$\bar{0}(x) = 0 \in R \ \forall\ x \in (0, 1)$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் வரையறுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே, $\bar{0}(x) \in A$ ஒரு மெய்மதிப்புடைய தொடர் சார்பாகும்.

$\therefore$ $\bar{0}(x) \in A$ எனும் சார்பு

$$\begin{aligned}(\bar{0}+f)(x) &= \bar{0}(x)+f(x)\\ &= 0+f(x)\\ &= f(x), \ \forall\ x \in (0, 1)\end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

(அ-து) $\bar{0}+f = f$

இவ்வாறே $f+\bar{0} = f$

எனவே, $\bar{0}$ எனும் சார்பு கூட்டு சர்வ சம மூலகமாக (additive identity) A-ல் உள்ளது.

(iv) $f \in A$ என்ற ஒவ்வொரு சார்புக்கும் $-f$ என்ற ஒரு சார்பை

$$(-f)(x) = -f(x)$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் வரையறுப்போம், பின் $-f$ எனும் சார்பும் மெய்மதிப்பு கொண்ட தொடர் சார்பாகும்.

$$\therefore \quad -f \in A.$$

எனவே, $f \in A$ என்ற ஒவ்வொரு சார்புக்கும், $-f \in A$ என்ற சார்பு

$$\begin{aligned}[f+(-f)](x) &= f(x)+(-f)(x)\\ &= f(x)-f(x)\\ &= 0=\bar{0}(x),\ \forall\ x \in (0,1)\end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

$\therefore\ f+(-f)=\bar{0}$

இவ்வாறே, $(-f)+f=\bar{0}$

ஆகவே, $-f$ எனும் சார்பு, f எனும் சார்பின் கூட்டு நேர்மாறு மூலகம் (additive inverse) ஆகும்.

(v) $f, g \in A$ எனின்,

$$\begin{aligned}(f+g)\,x &= f(x)+g(x)\\ &= g(x)+f(x)\\ &= (g+f)\,x,\quad \forall\ x \in (0,1)\end{aligned}$$

$\therefore\ f+g = g+f.$

2. (i) $a \in R$ யாதேனும் ஒரு திசையிலி, $f, g \in A$ என்க.

$$\begin{aligned}[a(f+g)](x) &= a[(f+g)(x)],\quad \forall\ x \in (0,1)\\ &= a[f(x)+g(x)]\\ &= af(x)+ag(x)\end{aligned}$$

[$\because\ a, f(x), g(x) \in R$ மெய்யெண்கள் பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டவை.]

$$\begin{aligned}&= (af)\,x+(ag)\,x \qquad \text{(2)-ன் படி.}\\ &= (af+ag)(x)\end{aligned}$$

$\therefore\ a(f+g) = af+ag.$

(ii) $a, b \in R;\ f \in A$ எனின்,

$$\begin{aligned}[(a+b)f](x) &= (a+b)f(x),\ \forall\ x \in (0,1)\\ &= af(x)+bf(x),\ [\because\ a, b \in R]\\ &= (af)\,x+(bf)\,x,\ [\text{(2)-ன் படி}]\\ &= [af+bf]\,x,\quad \forall\ x \in (0,1)\end{aligned}$$

$\therefore\ (a+b)f = af+bf.$

(iii) $a, b \in R,\ f \in A,$

$$\begin{aligned}[(ab)\,f](x) &= (ab)\,f(x)\\ &= a\,[bf(x)]\\ &= a\,(bf)(x),\ \forall\ x \in (0, 1)\end{aligned}$$

$\therefore\ (ab)\,f = a\,(bf).$

(iv) $1 \in R,\ f \in A,$

$(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x),\ \forall\ x \in (0, 1)$

$\therefore\ 1.f = f.$

ஒரு வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் $A\ (R)$-க்குப் பொருந்துகிறதாதலின், $A\ (R)$ ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

3. மெய்யெண்களை மூலகங்களாகக்கொண்ட அனைத்து m×n அணிகளும் ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

அனைத்து $m \times n$ அணிகளைக் கொண்ட கணம் V என்க.

(அ-து) $V = \{[a_{ij}]_{m\times n} : a_{ij} \in R\}.$

அணிகளது கூட்டலும் எண்ணி பெருக்கியும் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B = [b_{ij}]_{m\times n} \quad \text{எனின்,}$$

$$\begin{aligned}A + B &= [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\ ,\quad A \in V,\ B \in V\\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}\\ K\,A &= K\,[a_{ij}]_{m\times n} = [K\,a_{ij}]_{m\times n},\quad K \in R,\ A \in V.\end{aligned}$$

இனி $V\,(R)$ ஒரு வெக்டர் வெளி என நிறுவுவோம்.

1. (i) இணைச்சேர்க்கை

$$A, B \in V\,(R),$$

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in V\,(R)$$

(ii) பரிமாற்றுவிதி

$$\begin{aligned}A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}]\\ &= [a_{ij} + b_{ij}]\\ &= [b_{ij} + a_{ij}]\\ &= [b_{ij}] + [a_{ij}]\\ &= B + A.\end{aligned}$$

(iii) **சர்வசம மூலகம்**

$$O = [O_{ij}] \in V.$$

$$\therefore\ O + A = [O_{ij}] + [a_{ij}] = [O_{ij} + a_{ij}]$$
$$= [a_{ij}] = A.$$

($\because$ R-ல் கூட்டு சர்வ சம மூலகம் o ஆகும்.)

$$\therefore\ O + A = A$$

இவ்வாறே $A + O = A$.

(அ-து) $V(R)$-ல் சர்வ சம மூலகம் $[o_{ij}]$.

(iv) **நேர்மாறு மூலகம்**

$A \in V$ என்ற ஒவ்வொரு $m \times n$ அணிக்கும்

$-A = [-a_{ij}] \in V$ என்ற ஒரு $m \times n$ அணி

$$A + [-A] = [a_{ij}] + [-a_{ij}]$$
$$= [a_{ij} - a_{ij}] = [o_{ij}] = o$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

(அ-து) $A + [-A] = o$

இவ்வாறே $[-A] + A = o$.

(v) **சேர்ப்பு விதி**

$$(A+B) + C = \{ [a_{ij}] + [b_{ij}] \} + [c_{ij}],\ C = [c_{ij}]$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij})] + (c_{ij})$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})]$$
$$= [(a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij})]$$
$$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$$
$$= [a_{ij}] + [(b_{ij}) + (c_{ij})]$$
$$= A + (B + C)$$

$$\therefore\ (A + B) + C = A + (B + C).$$

எனவே V ஒரு பரிமாற்று குலம் ஆகும்.

2. (i) $KA = K[a_{ij}] = [K a_{ij}] \in V,\quad K \in R, A \in V.$

(ii)
$$K(A+B) = K[(a_{ij}) + (b_{ij})]$$
$$= K[a_{ij} + b_{ij}] = [K a_{ij} + K b_{ij}]$$
$$= [K a_{ij}] + [K b_{ij}]$$
$$= K[a_{ij}] + K[b_{ij}]$$
$$= KA + KB.$$

$$
\begin{aligned}
\text{(iii)}\ (K_1 + K_2)\,A &= (K_1 + K_2)\,[a_{ij}],\ K_1, K_2 \in R,\ A \in V,\\
&= [\,(K_1 + K_2)\,a_{ij}]\\
&= [\,K_1\,a_{ij} + K_2\,a_{ij}\,]\\
&= [\,K_1\,a_{ij}] + [\,K_2\,a_{ij}]\\
&= K_1\,[a_{ij}] + K_2\,[a_{ij}]\\
&= K_1\,A + K_2\,A.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(iv)}\quad (K_1\,K_2)\,A &= K_1\,K_2\,(a_{ij}) = [\,(K_1\,K_2)\,(a_{ij})\,]\\
&= [K_1\,(K_2\,a_{ij})\,] = K_1\,(K_2\,a_{ij})\\
&= K_1\,[K_2\,(a_{ij})\,] = K_1\,(K_2\,A)
\end{aligned}
$$

(அ-து) $(K_1\,K_2)\,A = K_1\,(K_2\,A).$

(v) $1 \in R,\ A \in V$ எனின்,

$$
\begin{aligned}
1.\,A &= 1.\,[a_{ij}] = [1.\,a_{ij}]\\
&= [a_{ij}] = A.
\end{aligned}
$$

(அ-து) $1.\,A = A.\quad \forall\, A \in V.$

வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் பொருந்துவதால் $V\,(R)$ ஒரு வெக்டர் வெளியாம்.

4. $\mathrm{V} = \{\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in F\,\}$ எனின், V ஒரு வெக்டர் வெளி என நிரூபி.

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, \ldots, a_n)\\
y &= (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ எனின்,}\\
x + y &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)\\
&= (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)
\end{aligned}
$$

$a\,x = a\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (aa_1, aa_2, \ldots, aa_n),\ a \in F$

$x = y$ எனின், $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$

இனி கணம் V, வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளுக்கும் பொருந்துகிறது என நிறுவுவோம்.

1. V ஒரு பரிமாற்று குலம்.

(i) $x, y \in V$ எனின்,

$$x + y = (a_1+b_1,\ a_2+b_2, \ldots, a_n + b_n) \in V.$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad x + y &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)\\
&= (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\\
&= (b_1 + a_1,\ b_2 + a_2, \ldots, b_n + a_n)\\
&= (b_1, b_2, \ldots, b_n) + (a_1, a_2, \ldots, a_n)\\
&= y + x.
\end{aligned}
$$

(iii) $O = (o, o, \ldots, o)$ சர்வ சம மூலகமாகும்.

$$\because \ O + x = (o, o, \ldots, o) + (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$= (o + a_1, o + a_2, \ldots, o + a_n)$$
$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) = x.$$

(iv) $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும்

$-x = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \in V$ என்ற ஒரு வெக்டர்

$$x + (-x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$$
$$= (a_1 - a_1, a_2 - a_2, \ldots, a_n - a_n)$$
$$= (o, o, \ldots, o)$$
$$= o \text{ சர்வ சம மூலகம்}$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

(v)
$$(x+y)+z = [(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots, b_n)]+(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$= (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) + (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$= [(a_1+b_1) + c_1, (a_2+b_2) + c_2, \ldots, (a_n+b_n) + c_n)$$
$$= [a_1 + (b_1+c_1), a_2 + (b_2+c_2), \ldots, a_n + (b_n+c_n)]$$
$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_n+c_n)$$
$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) + [(b_1, b_2, \ldots, b_n)+(c_1, c_2, \ldots, c_n)]$$
$$= x + (y + z).$$

எனவே, V ஒரு பரிமாற்று குலம்.

2. எண்ணி பெருக்கி விதிகள்.

(i)
$$a(x+y) = a(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$$
$$= [a(a_1+b_1), a(a_2+b_2), \ldots, a(a_n + b_n)]$$
$$= (aa_1+ab_1, aa_2+ab_2, \ldots, a\,a_n+ab_n)$$
$$= (aa_1, +aa_2, \ldots, aa_n) + (ab_1, ab_2, \ldots, ab_n)$$
$$= a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + a(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$= a\,x + a\,y.$$

(ii)
$$(a+b)x = (a+b)(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad a, b \in F$$
$$= [(a+b)a_1, (a+b)a_2, \ldots, (a+b)a_n)]$$
$$= (aa_1+ba_1, aa_2+ba_2, \ldots, aa_n+ba_n)$$
$$= (aa_1, aa_2, \ldots, aa_n) + (ba_1, ba_2, \ldots, ba_n)$$
$$= a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$= a\,x - b\,x.$$

(iii) $(ab)\, x = a\, b\, (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$= [\, (ab)\, a_1, (ab)\, a_2, \ldots, (ab)\, a_n \,]$
$= [a\, (ba_1),\ a\, (ba_2), \ldots,\ a\, (ba_n)\,]$
$= a\, (ba_1, ba_2, \ldots, ba_n)$
$= a\, [b\, (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,]$
$= a\, (bx)$

(iv) $1 \in F,\ x \in V,$
$1.\, x = 1.\, (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$= (1.\, a_1, 1.\, a_2, \ldots, 1.\, a_n)$
$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) = x.$

எனவே, கணம் V ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

5. மெய்யெண்களின் களத்தில் அனைத்து ஒருங்கு தொடர் முறைகளது கணம் ஒரு வெக்டர் வெளி என நிரூபி.

$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n\}$
$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} = \{y_n\}$
என்பவை இரண்டும் இரு ஒருங்கு தொடர்முறைகள் என்க.

1. V ஒரு பரிமாற்று குலம்.

(i) $x + y = \{x_n\} + \{y_n\}$
$= \{x_n + y_n\}$ ஒரு ஒருங்கு தொடர்முறை

(அ-து) $x, y \in V,\ x + y \in V.$

(ii) $x + y = \{x_n + y_n\}$
$= \{y_n + x_n\}$
$= \{y_n\} + \{x_n\} = y + x$

(அ-து) $x + y = y + x.$

(iii) $\{o\} = \{o, o, \ldots, o\}$ என்பது V-ல் சர்வ சம மூலகமாகும்.

$\because\ \{o\} + \{x_n\} = \{o + x_n\} = \{x_n\}.$

(iv) $\{x_n\} \in V$ என்ற ஒவ்வொரு தொடர் முறைக்கும் $\{-x_n\} \in V$ என்ற ஒரு தொடர்முறை

$\{x_n\} + \{-x_n\} = \{x_n - x_n\}$
$= \{o\}$ சர்வ சம மூலகம்

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

(v) $(x + y) + z = [\{x_n\} + \{y_n\}] + \{z_n\}$
$= \{x_n + y_n\} + \{z_n\}$
$= \{x_n\} + \{y_n + z_n\}$
$= \{x_n\} + [\{y_n\} + \{z_n\}]$
$= x + (y + z)$

எனவே, V ஒரு அபெலியன் (அ) பரிமாற்று குலமாகும்.

2. எண்ணி பெருக்கி விதிகள்.

(i) $a(x + y) = a[\{x_n\} + \{y_n\}], \quad a \in R$
$= a\{x_n + y_n\} = \{ax_n + ay_n\}$
$= \{ax_n\} + \{ay_n\} = a\{x_n\} + a\{y_n\}$
$= ax + ay.$

(ii) $(a + b)x = (a + b)\{x_n\} = \{(a + b)x_n\}$
$= \{ax_n + bx_n\} = \{ax_n\} + \{bx_n\}$
$= a\{x_n\} + b\{x_n\}$
$= ax + bx, \qquad x \in V, \quad a, b \in R$

(iii) $(ab)x = ab\{x_n\} = \{(ab)x_n\}$
$= \{a\ bx_n)\} = a\{bx_n\}$
$= a[b\{x_n\}] = a[bx].$

(iv) $1 \in R, \quad x \in V$
$1. x = 1. \{x_n\} = \{1. x_n\} = \{x_n\} = x.$

வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் பொருந்துவதால் $V(R)$ ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

4-8. வெக்டர் வெளியின் பண்புகள் (Properties of Vector Spaces)

1. $\mathbf{a.o = o, \forall\ a \in F, o \in V.}$

நிரூபணம்

$a(x + y) = ax + ay \quad \forall\ x, y \in V.$

$y + o$ எனின்,
$a(x + o) = ax + ao$
(அ) $ax = ax + ao$
(அ) $ax + o = ax + ao$
$\therefore\ o = ao$ (நீக்கல் விதிப்படி)
(அ) $ao = o$

2. $\mathbf{o\,x = o}$

நிருபணம்

$(a + b)\,x = ax + bx, \quad a, b \in F,\ x \in V$

$b = o$ எனின்,

$(a + o)\,x = ax + ox$

$ax = ax + ox$

$ax + o = ax + ox$

$\therefore \quad o = ox$ (நீக்கல் விதிப்படி)

(அ-து) $ox = o$

3. $\mathbf{(-a)\,x = -(ax)}$

நிருபணம்

$ax + (-a)\,x = [a + (-a)]\,x$ [$\because -a$ கூட்டு எதிர்மாறு மூலகம்]

$= ox = o$

(அ-து) $ax + (-a)\,x = o$

$\therefore \quad (-a)\,x = -(ax).$

4. $\mathbf{a\,(x - y) = ax - ay}$

நிருபணம்

$a\,(x - y) = a\,[x + (-y)]$

$= a\,x + a\,(-y)$

$= ax - ay$ (3-ன் படி)

$\therefore \ a\,(x - y) = ax - ay.$

4-9. வெக்டர் உள்வெளி (Vector Subspace)

F களத்தில் *V* எனும் வெக்டர் வெளியின் உட்கணம் (Subset) *W* என்க. வெக்டர் கூட்டல், எண்ணி பெருக்கி என்ற செய்கைகள் வெக்டர் வெளி *V*-யில் உள்ளது போன்றே உட்கணம் *W*-யிலும் இருப்பின், *W* கணம் *V*-யின் வெக்டர் உள்வெளி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. *V* என்ற வெக்டர் வெளியில் பூச்சிய வெக்டர் மட்டும் கொண்ட $\{o\}$ கணமும் வெக்டர் வெளி *V*-யும் வெக்டர் வெளி *V*-யின் வெக்டர் உள்வெளிகளாகும். இவை வெக்டர் வெளி *V*-யின் திரணமான உள்வெளிகள் (trivial subspaces) எனப்படும். மற்றவை திரணமல்லாத (Non-trivial) உள்வெளிகளாகும்.

2. அனைத்து $m \times m$ சதுர அணிகளது வெக்டர் வெளி V எனவும், அனைத்து $m \times m$ சமச்சீர் அணிகளது வெக்டர் வெளி W எனவும் கொண்டால், W என்பது V-யின் வெக்டர் உள் வெளியாகும்.

3. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_i \in F$ என்ற அனைத்து பல்லுறுப்பு கோவைகளது வெக்டர் வெளி V என்க. பின் $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$, $m < n$ என்ற அனைத்து பல்லுறுப்பு கோவைகளது கணம் W எனின், W வெக்டர்வெளி V-யின் வெக்டர் உள்வெளியாகும்.

4. $V_n(F)$ என்பது அனைத்து n-வெக்டர்களது வெக்டர்வெளி என்க.

$V_3(R)$ என்பது அனைத்து 3-வெக்டர்களது வெக்டர் வெளியாகும். இதன் வெக்டர்கள் (x_1, x_2, x_3) வடிவில் இருக்கும். ஆனால் $V_2(R)$ என்பது (x_1, x_2) வடிவில் இருக்கும் அனைத்து 2-வெக்டர்களது வெளியாகும்.

எனவே, $V_2(R)$ என்ற வெக்டர் வெளி $V_3(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் வெக்டர் உள் வெளியாகாது.

4–10. தேற்றம்

$V(F)$ ஒரு வெக்டர் வெளி எனவும் W ஓர் உட்கணம் எனவும் கொள்வோம். பின்,

(i) W ஒரு வெறுமையற்ற கணம்

(ii) $x, y \in W \Rightarrow x - y \in W$

(iii) $a \in F, x \in W \Rightarrow ax \in W$

என்ற மூன்று விதிகளும் பொருந்தினல், பொருந்தினல் மட்டுமே W கணம் V என்ற வெக்டர் வெளியின் வெக்டர் உள் வெளியாகும்.

நிரூபணம்

W கணம் V-யின் வெக்டர் உள்வெளி என்க. பின் W வெக்டர் வெளியாதலின் அது பரிமாற்று குலமாகும். மேலும் V-யின் உட்குலமும் (Subgroup) ஆகும். எனவே, 0 என்ற மூலகம் W-ல் இருக்கும்.

$\therefore$ W ஒரு வெறுமையற்ற கணம்.

மீண்டும் ஓர் உட்குலத்திற்கு அவசியமும் போதுமானதுமான விதி

$x, y \in W \Rightarrow x - y \in W$

மேலும், V-யின் வெக்டர் உள்வெளி W ஆதலின் $a \in F$, $x \in W \Rightarrow ax \in W$.

எனவே, W ஒரு வெக்டர் உள்வெளியெனின் கொடுத்துள்ள மூன்று விதிகளும் அதற்குப் பொருந்துகின்றன.

மறுதலையாக, மேற்குறிப்பிட்டுள்ள மூன்று விதிகளும் உட்கணம் W-க்குப் பொருந்துமெனின் உட்கணம் W ஒரு வெக்டர் உள்வெளி என நிறுவுவோம்.

(i), (ii) விதிகளின்படி W ஓர் உட்குலமாகும். V ஒரு பரிமாற்று குலமாதலின் அதன் உட்குலமான W–ம் ஒரு பரிமாற்று குலமாகும். எனவே, வெக்டர் வெளியின் முதல் விதி W–க்குப் பொருந்தும். (iii)-ன்படி வெக்டர் வெளியின் 2-வது விதியும் W-க்குப்பொருந்தும்.

$W \subset V$. W-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் V-யில் ஒரு மூலகமாகும். V-க்குப் பொருந்தும் வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் W-க்குப் பொருந்துவதால், வெக்டர் வெளி V-யின் ஒரு வெக்டர் உள்வெளி W ஆகும்.

4–11. தேற்றம்

V (F) ஒரு வெக்டர் வெளி எனவும் W அதன் உட்கணம் எனவும் கொள்வோம். பின்,

$a, b \in F;\ x, y \in W \Rightarrow ax + by \in W$

என்ற விதி பொருந்தினுல், பொருந்தினுல் மட்டுமே W என்பது வெக்டர் வெளி V-யின் உள்வெளியாகும்.

நிரூபணம்

W என்பது V-யின் வெக்டர் உள்வெளி என்க.

$$\therefore\ a \in F,\quad x \in W \Rightarrow ax \in W$$
$$b \in F,\quad y \in W \Rightarrow by \in W$$

மேலும், $ax, by \in W$

$$\Rightarrow ax + by \in W$$

எனவே, V-யின் வெக்டர் உள்வெளி W எனின்,

$a, b \in F;\quad x, y \in W \Rightarrow ax + by \in W$.

மறுதலையாக, $a, b \in F;\ x, y \in W \Rightarrow ax + by \in W$ என்க. இனி W என்பது V-யின் வெக்டர் உள்வெளி என நிறுவுவோம்.

$a = 1,\ b = -1$ எனின்,

$1, -1 \in F;\ x, y \in W \Rightarrow 1.\, x + (-1)\, y \in W$

(அ-து) $x - y \in W$

எனவே, W என்பது V-யின் உட்குலமாகும்.

V ஒரு பரிமாற்றுக் குலமாதலின் W-ம் ஒரு பரிமாற்றுக் குலம்.

மேலும், $b = o$ எனின்,

$$a \in F,\ x \in W \Rightarrow ax + by \in W$$
$$\Rightarrow ax \in W \quad (\because\ o\, y = o)$$

மீண்டும் $W \subset V$.

எனவே, வெக்டர் வெளி V-க்குப் பொருந்தும் அனைத்து விதிகளும் W-க்கும் பொருந்துவதால், உட்கணம் W வெக்டர் வெளி V-யின் உள்வெளியாகும்.

4–12. உள்வெளி செய்கைகள் (Algebra of Subspaces)

1. உள்வெளிகளது வெட்டு (Intersection of Subspaces).

V என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகளான W_1, W_2 என்பனவற்றின் வெட்டும் ஓர் உள்வெளியாகும்.

நிருபணம்

$x, y \in W_1 \cap W_2$, $a, b \in F$ என்க.

$$\therefore\ x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x \in W_1, x \in W_2$$
$$y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow y \in W_1, y \in W_2$$

W_1, W_2 உள்வெளிகளாதலின்,

$$x, y \in W_1 \Rightarrow ax + by \in W_1$$
$$x, y \in W_2 \Rightarrow ax + by \in W_2$$
$$\therefore\ ax + by \in W_1 \cap W_2.$$

(அ-து) $a, b \in F;\ x, y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow ax + by \in W_1 \cap W_2$

$\therefore\ W_1 \cap W_2$ ஓர் உள்வெளியாகும்.

மேலும், பொதுவாக,

"ஒரு வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகளது வெட்டு ஓர் உள்வெளி" என்பதும் உண்மை.

நிருபணம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகள் $W_1, W_2, \ldots, W_n$ என்க.

$W = \cap W_i = \{x \in V : x \in W_i\}$ என்க.

W ஒரு வெறுமையற்ற கணமாகும். $\because \; o \in W_i \; \forall i$.

$\therefore \; o \in \cap W_i = W$

$a, b \in F; \; x, y \in W$ எனின்,

$x, y \in W_i \; \forall i$

$\therefore \; ax + by \in W_i \; \forall i \quad (\because \; W_i$ ஓர் உள்வெளி)

(அ-து) $ax + by \in \cap W_i$

எனவே, $\cap W_i$ ஓர் உள்வெளியாகும்.

2. உள்வெளிகளது ஒன்றிணைப்பு (Union of Subspaces)

V என்ற வெக்டர் வெளியானது இரு உள்வெளிகள் W_1, W_2 எனின், $W_1 \cup W_2$ என்பது அவ்விரு உள்வெளிகளது ஒன்றிணைப்பு எனப்படும்.

இரு உள்வெளிகளது ஒன்றிணைப்பு ஓர் உள்வெளியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு

$V_3(R) = \{(a, b, c); \; a, b, c \in R\}$ ஒரு வெக்டர் வெளி எனவும்,

$W_1 = \{(a, o, o) : a \in R\}$

$W_2 = \{(o, b, o) : b \in R\}$

என்பவை $V_3(R)$-ன் இரு உள்வெளிகள் எனவும் கொள்வோம். பின்,

$W_1 \cup W_2 = \{x : x = (a, o, o) \text{ (அ) } (o, b, o)\}$

என்பது ஓர் உள்வெளியாகாது.

$\because \; K_1, K_2 \in F; \; x = (a, o, o), y = (o, b, o) \in W_1 \cup W_2$

$$\Rightarrow K_1 x + K_2 y = K_1 (a, o, o) + K_2 (o, b, o)$$
$$= (K_1 a, o, o) + (o, K_2 b, o)$$
$$= (K_1 a, K_2 b, o) \notin W_1 \cup W_2.$$

3. ஒருபடி கூட்டல் (Linear Sum)

$V(F)$ என்ற வெளியானது யாதேனும் இரு உள்வெளிகள் W_1, W_2 எனின், W_1-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் W_2-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துடன் கூட்டிப் பெறும் அனைத்து மூலகங்களது தொகுதி (கணம்) W_1, W_2 ஆகியவைகளின் ஒருபடி கூட்டல் எனப்படும்.

குறியீட்டின்படி,

$$W_1 + W_2 = (x+y : x \in W_1, y \in W_2)$$

எடுத்துக்காட்டு

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a, & o \\ c, & d \end{pmatrix} : a, c, d \in R \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ o, & o \end{pmatrix} : a, b, \in R \right\} \text{ எனின்,}$$

$$W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R \right\} = V$$

4–13. தேற்றம்

W_1, W_2 என்பவை $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகளெனின், $W_1 + W_2$ என்ற ஒருபடி கூட்டலும் V-யின் உள் வெளியாகும்.

நிரூபணம்

$x_1, x_2 \in W_1$; $y_1, y_2 \in W_2$ என்க.

எனவே, $x = x_1 + y_1, y = x_2 + y_2 \in W_1 + W_2$

$a, b \in F$; $x_1, x_2 \in W_1 \Rightarrow ax_1 + bx_2 \in W_1$
$a, b \in F$; $y_1, y_2 \in W_2 \Rightarrow ay_1 + by_2 \in W_2$
($\because$ W_1, W_2 உள்வெளிகளாகும்)

$\therefore$ $(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2) \in W_1 + W_2$

மீண்டும், $a, b \in F$, $x, y \in W_1 + W_2$

$$\begin{aligned} ax + by &= a[x_1 + y_1] + b[x_2 + y_2] \\ &= ax_1 + ay_1 + bx_2 + by_2 \\ &= (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2) \in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ $W_1 + W_2$ என்பது V-யின் உள்வெளியாகும்.

4–14. நேரான தொகை (Direct Sum)

W_1, W_2 என்பவை $V(F)$ என்ற வெக்டர்வெளியின் உள் வெளிகள் என்க. $x \in W_1, y \in W_2, z \in V$ என்க. $z \in V$ என்ற மூலகம் $z = x + y$ என்ற ஒரே முறையில் விவரிக்கப்பெறின், V என்பது W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகளது நேரான தொகை எனப் படும்.

W_1, W_2 வெளிகளது நேரான தொகை $W_1 \oplus W_2$ என குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) $V = W_1 \oplus W_2$.

எடுத்துக்காட்டு

1. $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} ; \ a, b, c, d \in R \right\}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a, & o \\ o, & d \end{pmatrix} ; \ a, d \in R \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} o, & b \\ c, & o \end{pmatrix} ; \ b, c \in R \right\}$$ என்க.

V-ல் உள்ள $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ என்ற யாதேனும் ஒரு மூலகம்

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & o \\ o, & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o, & b \\ c, & o \end{pmatrix}$$

என ஒரே முறையில் விவரிக்கப்படும்.

$\therefore$ W_1, W_2 உள்வெளிகளது நேரான கூட்டுத் தொகை V ஆகும்.

(அ-து) $V = W_1 \oplus W_2$.

2. $V_3(R)$ என்ற வெக்டர்வெளியில் $z = (a, b, c)$ என்க.

$W_1 = \{ (a, b, o) ; \ a, b \in R\}$

$W_2 = \{ (o, b, c) ; \ b, c \in R\}$ என்பவை

$V_3(R)$-ன் இரு உள் வெளிகள் என்க.

$$z = (a, b, c) = \left(a, \frac{b}{2}, o\right) + \left(o, \frac{b}{2}, c\right)$$

$$= \left(a, \frac{b}{4}, o\right) + \left(o, \frac{3b}{4}, c\right)$$

(அ-து) $z = \alpha_1 + \beta_1, \quad \alpha_1 \in W_1, \beta_1 \in W_1$
$= \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 \in W_1, \beta_2 \in W_2$

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள வகைக்குறிப்பு ஒரே முறையில் இல்லை.

எனவே, $V \neq W_1 \oplus W_2$.

ஆனால், $V = W_1 + W_2$.

4-15. தேற்றம்

V என்ற வெக்டர்வெளி அதன் உள்வெளிகளான W_1, W_2 என்பனவற்றின் ஒருபடி கூட்டல் எனின்,

$$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{o\}.$$

நிரூபணம்

$V = W_1 \oplus W_2$ என்க.

இனி நாம் $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ என நிறுவுவோம்.

இயலுமெனின், ஒரு பூச்சியமில் வெக்டர் $W_1 \cap W_2$-ல் உள்ளது என்க.

(அ-து) $z \in W_1 \cap W_2, z \neq o$

$\therefore \quad z \in W_1, \; z \in W_2$

$W_1 \cap W_2$ என்பது V-யின் உள்வெளி யாதலின்,

$z \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow z \in V.$

இப்பொழுது,

$$z = o + z, \quad o \in W_1, \quad z \in W_2$$
$$= z + o, \quad z \in W_1, \quad o \in W_2.$$

(அ-து) $z \in V$ என்ற பூச்சியமில் வெக்டர் ஒரே முறையில் விளக்கப் படவில்லை. இது $V = W_1 \oplus W_2$ என்ற கொள்கைக்கு எதிர் மறையானதாகும். எனவே, பூச்சியமில் வெக்டர்கள் $W_1 \cap W_2$-ல் கிடையாது. $W_1 \cap W_2$ ஓர் உள் வெளியாதலின் அதிலுள்ள ஒரே வெக்டர் பூச்சிய வெக்டர் ஆகும்.

$\therefore \quad V = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{o\}$

மறுதலையாக, $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ என்க.

இனி நாம் $V = W_1 \oplus W_2$ என நிறுவுவோம்.

$V = W_1 + W_2$ ஆதலின்
$z = x + y, \ z \in V; \ x \in W_1; y \in W_2$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இந்த விளக்கம் ஒரே முறை விளக்கம் என நிரூபிப்போம்.

இயலுமெனின், வேறொரு விளக்கம் உள்ளது என்க.

(அ-து) $z = x + y, \ x \in W_1, y \in W_2$
$= x_1 + y_1, \ x_1 \in W_1, y_1 \in W_2$

$\therefore \ x + y = x_1 + y_1$
$x - x_1 = y_1 - y$

$x, x_1 \in W_1 \Rightarrow x - x_1 \in W_1$ ($\because$ W_1 ஓர் உள்வெளி)
$y, y_1 \in W_2 \Rightarrow y - y_1 \in W_2$ ($\because$ W_2 ஓர் உள்வெளி)

$x - x_1 = y_1 - y$ ஆதலின், W_1-ல் உள்ள ஒரு மூலகமும் W_2-ல் உள்ள மூலகமும் ஒன்றேயாகும். (அ-து) W_1, W_2 என்ற இரு உள் வெளிகளுக்கும் பொதுவான ஒரு மூலகம் உண்டு. ஆனால் $W_1 \cap W_2 = \{o\}$.

$\therefore$ $(x - x_1)$, $(y_1 - y)$ என்ற வெக்டர்கள் பூச்சிய வெக்டர் களாகும்.

$\therefore \ x - x_1 = o, \ y_1 - y = o$

$\therefore \ x = x_1, \ y = y_1.$

எனவே, $z = x + y$ என்ற விளக்கம் ஒரே முறை விளக்க மாகும்.

$$\therefore \ V = W_1 \oplus W_2.$$

4–16. V ஒரு வெக்டர் வெளி, $W_1, W_2, \ldots, W_n$ அதன் உள் வெளிகள் என்க. $z \in V$ என்ற வெக்டர்

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ x_i \in W_i$$

என்று ஒரே முறையில் விளக்கப்பெறின், $W_1, W_2, \ldots, W_n$ என்ற வெக்டர் உள்வெளிகளது நேரான தொகை V ஆகும்.

(அ-து) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$

4–17. ஒன்றுத உள்வெளிகள் (Disjoint Subspaces)

W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகளது வெட்டு ஒரு பூச்சிய உள் வெளி எனின், W_1, W_2 இரண்டும் ஒன்றுத உள்வெளிகள் எனப் படும். W_1, W_2 இரண்டும் ஒன்றுத உள்வெளிகள் எனின், $W_1 \cap W_2 = \{o\}$

4–18. நிரப்பு உள்வெளிகள் (Complementary Subspaces)

$V = W_1 \oplus W_2$ எனின், V என்ற வெக்டர் வெளியின் உள் வெளிகளான W_1, W_2 என்பவை நிரப்பு உள் வெளிகள் எனப்படும்.

4–19. ஒரு கணத்தின் ஒருபடி பிறப்பாக்கி — வரையறை (Linear span of a set)

$V(F)$ என்ற ஒரு வெக்டர் வெளியின் வெறுமையற்ற உட் கணம் S என்க. S-ல் உள்ள மூலகங்களின் அனைத்து ஒருபடி முடிவுறு சேர்மானங்களின் கணம் ஒருபடி பிறப்பாக்கி (Linear span of a set) எனப்படும். இது $L(S)$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

4–20. தேற்றம்

V ஒரு வெக்டர் வெளி, S அதன் உட்கணம் எனின் L (S) ஓர் உள்வெளியாகும்.

நிரூபணம்

$L(S)$-ல் யாதேனும் இரு மூலகங்கள் x, y என்க.

எனவே, வரையறையின்படி,

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n;\ a_i \in F, x_i \in S$$
$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m;\ b_j \in F, y_j \in S.$$

$L(S)$ ஓர் உள்வெளி என நிறுவ

$$a, b \in F;\ x, y \in L(S) \Rightarrow ax + by \in L(S)$$

என நாம் நிறுவவேண்டும்.

$$\begin{aligned} ax + by &= a[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n] \\ &\quad + b[b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m] \\ &= a\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \\ &= \sum_{1}^{n} (a a_i) x_i + \sum_{1}^{m} (b b_j) y_j \\ &= (a a_1) x_1 + (a a_2) x_2 + \dots + (a a_n) x_n \\ &\quad + (b b_1) y_1 + (b b_2) y_2 + \dots + (b b_m) y_m \end{aligned}$$

(அ-து) $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots y_m$ என்ற S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக $(ax + by)$ -ஐ விளக்க முடியும்.

$\therefore\ ax + by \in L(S)$.

எனவே, $L(S)$ என்பது வெக்டர்வெளி V-யின் உள்வெளி.

4–21. V (F) வெக்டர் வெளியின் உட்கணங்கள் S, T எனின்,

(i) $S \subset L(T) \Rightarrow L(S) \subset L(T)$.

(ii) $S \subset T \Rightarrow L(S) \subset L(T)$.

(iii) V-யின் உள்வெளி $S \Leftrightarrow L(S) = S$

(iv) $L[L(S)] = L(S)$

(v) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

நிரூபணம்

(i) $S \subset L(T)$ (கொள்கை)

$\therefore$ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$; $a_1, a_2, \ldots a_n \in F$ எனின்,

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in L(T)$

$$x \in L(S) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in L(T)$ $\therefore$ $\sum a_i x_i \in L(T)$

$\therefore$ $x \in L(T)$.

ஆனல், $x \in L(S)$.

$\therefore$ $x \in L(S) \Rightarrow x \in L(T)$

$\therefore$ $L(S) \subset L(T)$.

(ii) $S \subset T$ (கொள்கை)

$x \in L(S)$ என்க. $\therefore$ $x = \sum a_i x_i$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in S \Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$

$\therefore \sum a_i x_i \in L(T)$

$\therefore$ $x = \Sigma a_i x_i \in L(T)$

(அ-து) $x \in L(T)$

எனவே, $x \in L(S) \Rightarrow x \in L(T)$

$\therefore$ $L(S) \subset L(T)$

(iii) V-யின் உள்வெளி S என்க.

இனி $L(S) = S$ என நிறுவுவோம்.

$x \in L(S) \Rightarrow x = \Sigma a_i x_i$; $x_i \in S, a_i \in F \Rightarrow x \in S$

($\because$ V-யின் உள்வெளி S)

$\therefore$ $L(S) \subset S$

மேலும் $S \subset L(S)$ என்பது தெளிவு.

$\therefore$ $L(S) = S$.

மறுதலையாக, $L(S) = S$ என்க.

V-யின் உள்வெளி $L(S)$ ஆதலின், S-ம் V-யின் உள்வெளியாகும்.

$\therefore$ V-யின் உள்வெளி $S \Leftrightarrow L(S) = S$.

(iv) $L[L(S)] = L[S]$ என நிறுவ, $L(S) = T$ என்க.

$L(S)$ ஓர் உள்வெளியாதலின் T-ம் ஓர் உள்வெளியாம்.

(iii)-ன் படி $L(T) = T$

$\therefore$ $L[L(S)] = L(S)$.

(v) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ என நிறுவ

$x \in L(S \cup T)$ என்க.

$$\therefore \quad x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \; ; \; a_i \in F, x_i \in S \cup T$$
$$= \Sigma a_j x_j + \Sigma a_k x_k \; ; \; x_j \in S, x_k \in T$$

$\therefore$ $x \in L(S) + L(T)$

ஆகவே, $L(S \cup T) \subset L(S) + L(T)$ — (1)

மீண்டும், $z \in L(S) + L(T)$ என்க.

$$\therefore \quad z = x + y \; ; \; x \in L(S), y \in L(T)$$
$$= \Sigma a_j x_j + \Sigma a_k x_k \; ; \; x_j \in S, x_k \in T$$
$$= \Sigma a_i x_i \quad [\{x_i\} = \{x_j\} \cup \{x_k\}]$$

$\therefore$ $z \in L(S \cup T)$.

எனவே, $L(S) + L(T) \subset L(S \cup T)$ — (2)

ஆகவே (1), (2)-ன் படி

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T).$$

4-22. இணைக்கணம் (Coset)

$V(F)$ ஒரு வெக்டார் வெளி, W அதன் உள்வெளி என்க.

$x \in V$ எனின்,

$$A = \{x + y : y \in W\}$$

எனும் கணம் இடது இணைக்கணம் எனப்படும். இது $x + W$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இவ்வாறே,

$$B = \{y + x : y \in W\}$$

எனப்படுவது வலது இணைக்கணம் (Right Coset) எனப்பட்டு $W + x$ எனக் குறியிடப்படும்.

வெக்டர் வெளியில் கூட்டல் பரிமாற்றுவிதி பொருந்துமாதலின்,

$$x + y = y + x \qquad \forall\, x \in V, y \in W$$
$$\therefore \quad x + W = W + x.$$

(அ-து) W-ன் வலது இணைக்கணமும் இடது இணைக்கணமும் முழுவதும் ஒத்துள்ளது.

W என்ற கணமும் $O + W$ என்ற இணைக்கணமாகும்.

4–23. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த V என்ற ஒரு வெக்டர் வெளியில் W என்பது ஓர் உள்வெளி (Subspace) எனின்,

$$V' = \{W + x : x \in V\}$$

என்ற கணம், பின்வரும் வரையறைகளுக்குட்பட்ட F களத்தின் மீதமைந்த ஓர் உள்வெளியாகும்:

(i) $(W + x) + (W + y) = W + (x + y), \quad \forall\, x, y \in V$

(ii) $a\,(W + x) = W + ax, \quad \forall\, a \in F, x \in V.$

நிரூபணம்

முதலில் கூட்டல், பெருக்கல் சேர்க்கைகள் நன்கு வரையறுக்கப் பட்டுள்ளனவா என்பதைக் காண்போம்.

அதாவது,

(i) $W + x = W + x', W + y = W + y', x, x', y, y' \in V$ எனின், $W + (x + y) = W + (x' + y')$

(ii) $W + x = W + x', x, x' \in V$ எனின்,
$$W + ax = W + ax', a \in F$$
என நிறுவுவோம்.

(i) $W + x = W + x'$

எனவே, $W = W + x' + (-x)$,

$$\therefore \quad x' - x \in W \qquad (\because \quad W + x = W, x \in W)$$
$$\Rightarrow x' = x + w_1, w_1 \in W$$

இவ்வாறே, $W + y = W + y'$ எனின், $y' = y + w_2, w_2 \in W.$

எனவே, $(W + x') + (W + y') = + W + (x' + y')$ (வரையறையின் படி)
$$= W + (x + w_1 + y + w_2)$$
$$= (W + w_1 + w_2) + (x + y)$$
$$= W + (x + y)$$
$$= (W + x) + (W + y).$$

எனவே, கூட்டல் சேர்க்கை (addition composition) நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) $W + x = W + x'$
$\Rightarrow$ $x' - x \in W$
$\Rightarrow$ $a(x' - x) \in W, \quad a \in F$
$\Rightarrow$ $ax' - ax \in W$
$\Rightarrow$ $W + ax = W + ax'$

எனவே, பெருக்கல் சேர்க்கையும் (Multiplication Composition) நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

இனி V' ஒரு வெக்டர் வெளி என நிறுவுவோம். (அ-து), வெக்டர் வெளிக்கான கோட்பாடுகள் V'-ல் பொருந்துகின்றன என நிறுவுவோம்.

1. (1) $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$
$\therefore$ $W + x, W + y \in V'$
$\Rightarrow$ $(W + x) + (W + y) = W + (x + y) \in V'$
$\Rightarrow$ $(W + x) + (W + y) \in V'$.

எனவே, கூட்டல் இணைச்சேர்க்கை V'-ல் பொருந்தும்.

(2) $(W + x) + (W + y)$
$= W + (x + y)$
$= W + (y + x)$
$= (W + y) + (W + x)$

எனவே, பரிமாற்றுவிதி V'-ல் பொருந்தும்.

(3) $W + x, W + y, W + z, \in V'; x, y, z \in V$, எனின்,
$[(W + x) + (W + y)] + (W + z)$
$= [W + (x + y)] + (W + z)$
$= W + (x + y) + z$
$= W + x + (y + z)$
$= (W + x) + [(W + (y + z)]$
$= (W + x) + [(W + y) + (W + z)]$

எனவே, சேர்ப்பு விதியும் V'-ல் பொருந்தும்.

(4) $O \in V$ எனின், $W + O \in V'$ என்பது
$(W + o) + (W + x) = W + (o + x), \quad W + x \in V'$
$= W + x$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

எனவே கூட்டு சர்வசம மூலகம் $W + O$ ஆகும்.

(5) $W + x \in V'$ எனின், $W + (-x) \in V'$ என்ற மூலகம்

$$\begin{aligned}(W + x) + [W + (-x)] &= W + [x + (-x)]\\ &= W + o\end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

எனவே, $(W + x)$ என்ற மூலகத்திற்கு $W + (-x)$ என்ற ஒரு நேர்மாறு மூலகம் உள்ளது.

2. (1) $a \in F, x \in V$, எனின், $ax \in V$.

$\therefore \quad a \in F, \; W + x \in V' \Rightarrow a(W + x) = W + ax \in \overline{V'}$

(அ-து) $a(W + x) \in V'$.

எனவே, V_1-ல் பெருக்கு இணைச் சேர்க்கை உள்ளது.

(2) $a \in F; \; W + x, \; W + y \in V'$,

$$\begin{aligned}a[(W + x) + (W + y)] &= a[W + (x + y)]\\ &= W + a(x + y)\\ &= W + ax + ay\\ &= (W + ax) + (W + ay)\\ &= a(W + x) + a(W + y)\end{aligned}$$

எனவே, V'-ல் பெருக்கு பங்கீட்டு விதி உள்ளது.

(3) $a, b \in F; \; W + x \in V'$,

$$\begin{aligned}(a + b)(W + x) &= W + (a + b)x\\ &= W + (ax + bx)\\ &= (W + ax) + (W + bx)\\ &= a(W + x) + b(W + x)\end{aligned}$$

(4) $a, b \in F; \; W + x \in V'$,

$$\begin{aligned}(ab)(W + x) &= W + (ab)x = W + a(bx)\\ &= a[W + bx]\\ &= a[b(W + x)]\end{aligned}$$

(5) $W + x \in V'$ என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும், $1 \in F$ என்ற மூலகம்,

$$1(W + x) = W + 1 \cdot x = W + x$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது.

ஒரு வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் V'-க்குப் பொருந்துவதால், V' ஒரு வெக்டர் வெளியாம்.

4-24. ஈவு வெளி (Quotient Space)

V என்ற வெக்டர் வெளியின் ஓர் உள் வெளி W எனின், W-ன் அனைத்து இணைக்கணங்களின் கணமான V_1, W-ஐ சார்கின்ற வெக்டர் வெளி V-ன் ஈவு வெளி எனப்படும். இது $\frac{V}{W}$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

சிக்கலெண் கெழுக்கள் உடைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி $V(c)$ எனின், பின் வருபனவற்றை நிரூபி.

1. இரட்டை, ஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவைகளது W_1. W_2, என்ற கணங்கள் உள் வெளிகள்.

2. W_1, W_2 என்பவை நிரப்பு உள் வெளிகள்.

நிரூபணம்

$$V(c) = \{ p(t) : \ p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots \}, a_i \in C$$

1. $p(-t) = p(t)$ எனின், $p(t)$ இரட்டை பல்லுறுப்புக்கோவை எனவும், $p(-t) = -\ p(t)$ எனின், ஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவை எனவும் கூறப்படும்.

$W_1 = \{ p(t) : \ p(t)$ இரட்டை பல்லுறுப்புக்கோவை $\}$
$W_2 = \{ p(t) : \ p(t)$ ஒற்றை பல்லுறுப்புக்கோவை $\}$

$p_1(t) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \ldots,$
$p_2(t) = a_0' + a_2' t^2 + a_4' t^4 + \ldots,$
$p_1(t),\ p_2(t) \in W_1$ என்க.

$a, a' \in C$ எனின்,

$$\begin{aligned} ap_1(t) + a' p_2(t) &= a(a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \ldots) \\ &\quad + a'(a_0' + a_2' t^2 + a_4' t^4 + \ldots) \\ &= (a a_0 + a' a_0') + (a a_2 + a' a_2') t^2 + \ldots \end{aligned}$$

இது ஓர் இரட்டை பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எனவே, $ap_1(t) + a' p_2(t) \in W_1$.

(அ-து) $p_1(t),\ p_2(t) \in W_1;\ a, a' \in C,$
$a p_1(t) + a' p_2(t) \in W_1$

$\therefore\ W_1$ ஓர் உள் வெளியாகும்.

இவ்வாறே W_2-ம் ஓர் உள் வெளியாகும்

2. அடுத்து W_1, W_2 என்பவை நிரப்பு உள் வெளிகள் என நிறுவுவோம்.

(அ-து) $V = W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ என நிறுவுவோம்.

$$z \in V = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$
$$= (a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots) + (a_1 t + a_3 t^3 + \dots)$$
$=$ பல்லுறுப்புக்கோவை $\in W_1 +$ பல்லுறுப்புக் கோவை $\in W_2$.

$\therefore \quad V = W_1 + W_2$.

மீண்டும், $p(t) \in W_1 \cap W_2$ என்க.

$\therefore \quad p(t) \in W_1, \; p(t) \in W_2$.

எனவே, $p(-t) = p(t) \quad \because \; p(t) \in W_1$

$p(-t) = -p(t) \quad \because \; p(t) \in W_2$

$\therefore \quad p(t) = -p(t)$.

(அ-து) $p(t) + p(t) = 0$. பூச்சிய பல்லுறுப்புக்கோவை

$\therefore \quad W_1 \cap W_2 = \{o\}$

$\therefore \quad V = W_1 \oplus W_2$.

(அ-து) W_1, W_2 என்பவை நிரப்பு உள்வெளிகளாம்.

4–25. அடிப்படை (Basis)

$V(F)$ ஒரு வெக்டர் வெளி, V-ன் உட்கணம் S என்க.

1. S-ல் உள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகவும்,

2. V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகவும் இருப்பின்,

S என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணம் எனப்படும். இது B எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots (0, 0, \dots 1)$ என்ற n வெக்டர்களைக் கொண்ட ஓர் அமைப்பு S, $V_n(F)$-ன் அடிப்படைக் கணமாகும்.

முதலில் S-ல் உள்ள வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிறுவுவோம்.

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ என்க.

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$; $e_1, e_2, \ldots, e_n \in S$ ஆதலின்,

$$\begin{aligned} & a_1 e_2 + a_2 e_2 + \ldots a_n e_n \\ & \quad = a_1 (1, 0, \ldots, 0) + a_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n (0, 0, \ldots, 1) \\ & \quad = (a_1, a_2, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = O \\ \Rightarrow \quad & (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0) \\ \Rightarrow \quad & a_1 = o, \ a_2 = o, \ldots, a_n = 0. \end{aligned}$$

எனவே, S ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாகும்.

மீண்டும்,

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

(அ-து) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ என்ற V-யில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் S-ல் உள்ள மூலகங்கள் $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ஆகியவற்றின் ஒரு படிச் சேர்மானமாகும்.

$\therefore$ S ஓர் அடிப்படைக் கணம் (Basis Set).

4-26. கூறுகள் (Co-ordinates)

n பரிமாண வெக்டர் வெளி V-ன் அடிப்படைக் கணம் $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ என்க. V-ல் உள்ள யாதாமொரு வெக்டர் v எனின்,

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n, \ a_i \in F$$

பின், $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்ற திசையிலிகள். கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடிப் படையைச்சார்ந்த வெக்டர் v-ன் கூறுகள் எனப்படும். $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ என்பது கூறு வெக்டர் (Co-ordinate Vector) எனப்படும். இவ்வெக்டர் $[v]_e$ அல்லது $[v]$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

4-27. தேற்றம்

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணத்தை அடிப்படைக் கணமாகக் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி V-ல், $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டரும் B-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக ஒரே முறையில் (uniquely) விளக்கப்படும்.

நிரூபணம்

V-ன் அடிப்படைக் கணம் B ஆதலின் $x \in V$ என்ற வெக்டர்,

$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n$ (1) என்று விளக்கப்படும்.

மேற் குறிப்பிட்டது ஒரே முறை விளக்கம் என நாம் நிறுவ வேண்டும்.

இயலுமெனின்,

$$x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \text{ என்க.} \quad (2)$$

(1)-லிருந்து (2)-ஐக் கழிக்க,

$$o = (a_1 - b_1) x_1 + (a_2 - b_2) x_2 + \dots + (a_n - b_n) x_n$$

B கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாதலின்,

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$$

$$\therefore\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

எனவே, மேற்குறிப்பிட்டுள்ள (1), (2) என்ற இரு விளக்கங்களும் ஒன்றேயாகும்.

(அ-து) $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டரும் B-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக ஒரே முறையில் விளக்கப் படும்.

4-28. தேற்றம்

ஒவ்வொரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளிக்கும் ஓர் அடிப்படை உண்டு.

நிரூபணம்

$V(F)$ ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி, $x_1, x_2, \dots, x_m$ வெக்டர்கள் கொண்ட அமைப்பு S, V-ஐப் பிறப்பிக்கின்றது என்க.

S-ல் உள்ள அனைத்து வெக்டர்களும் பூச்சியமில் வெக்டர்கள் எனக் கொள்ளலாம். இனி, S ஒருபடிச் சார்பற்றது எனின், அது ஓர் அடிப்படைக் கணமாகும்.

S ஒருபடிச் சார்புடையது எனக் கொள்வோம். எனவே, x_i என்ற வெக்டர் $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ என்ற வெக்டர்களது ஒரு படிச் சேர்க்கையாகும். அதாவது, $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ என்ற வெக்டர்கள் கொண்ட அமைப்பும் $V(F)$-ஐ பிறப்பிக்கும். $x_1, x_2, \dots, x_m$ என்ற வெக்டர்களது அமைப்பான S பிறப்பிக்கும் வெக்டர் வெளி $V(F)$ ஆதலின், $V(F)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் S-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். மேலும், x_i வெக்டர் $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். எனவே, $V(F)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

அதாவது, $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ என்ற $(m-1)$ வெக்டர்களது அமைப்பான S_1 (என்க)-ம் $V(F)$-ஐ பிறப்பிக்கின்றது. S_1

ஒருபடிச் சார்பற்றது எனின், S_1 அடிப்படைக் கணமாகும். S_1-ம் ஒருபடிச் சார்புடையதெனின் $(m-2)$ வெக்டர்கள் கொண்ட S_2 என்ற ஓர் அமைப்பைக் காணலாம். இது ஒருபடிச் சார்பற்றதாக இருந்து $V(F)$-ன் அடிப்படையாக இருக்கக்கூடும். இல்லையெனின், மேற்குறிப்பிட்டவாறு தொடர்ந்து ஒரே ஒரு பூச்சியமில் வெக்டர் கொண்ட கணத்தை அடையலாம். இக்கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

எனவே, ஒவ்வொரு வெக்டர் வெளிக்கும் ஓர் அடிப்படைக் கணம் உண்டு. மேலும், முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி ஒன்றுக்குக் குறைந்தது ஓர் அடிப்படை உண்டு.

4–29. தேற்றம்

$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ என்ற முடிவுள்ள கணம் S பிறப்பிக்கும் வெக்டர் வெளி $V(F)$ எனின், இவ்வெளியில் உள்ள யாதேனும் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம் S_1-ன் மூலகங்களது எண்ணிக்கை m-க்கு மேற்படாது.

நிரூபணம்

$$S = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$$

$$S_1 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \} \quad \text{என்க.}$$

$L(S) = V$, S_1 கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றது.

நாம் $n \leq m$ என நிறுவவேண்டும்.

S_1-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் V-ல் உள்ள ஒரு மூலகம். மேலும், கணம் S வெக்டர் வெளி V-ஐ பிறப்பிக்கின்றது. எனவே, S_1-ல் உள்ள எந்த ஒரு வெக்டரும் S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

(அ-து) $y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m, \; a_i \neq O, \; a_i \in F.$ (1)

இனி, $S_2 = \{ y_1, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$

என்ற ஒரு கணத்தை எடுத்துக் கொண்டால் $S_2 \subset S$ என்றாகும்.

$$\therefore \; L(S_2) \subset L(S)$$

$$\Rightarrow \; L(S_2) \subset V.$$

மேலும், V-ல் உள்ள ஒரு வெக்டர் x எனின்,

$$x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m, \quad b_i \in F$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_i x_i = \sum_{i \neq j} b_i x_i + b_j x_j \qquad (2)$$

(1)-லிருந்து,

$$y_1 = \sum_{i \neq j} a_i x_i + a_j x_j, \quad a_j \neq 0$$

(அ-து) $x_j = \overline{a_j}' y_j - \sum_{i \neq j} (a_i \overline{a_j}') x_i$ — (3)

சமன்பாடுகள் (2), (3)-லிருந்து

$$x = \sum_{i \neq j} b_i x_i + b_j x_j, \quad x \in V.$$

$$= \sum_{i \neq j} b_i x_i + b_j \left[\overline{a_j}' y_i - \sum_{i \neq j} (a_i \overline{a_j}') x_i \right]$$

$$= \sum_{i \neq j} \left(b_i - a_i b_j \overline{a_j}' \right) x_j + b_j \overline{a_j}' y_1$$

$$= \sum_{i \neq j} \left(b_i - a_i \frac{b_j}{a_j} \right) x_i + \frac{b_j}{a_j} y_1$$

$\therefore \; x \in L(S_2)$.

ஆகவே, $V \subset L(S_2)$. ஆனல் $L(S_2) \subset V$.

எனவே, $L(S_2) = V$.

கணம் S_2-ல் உள்ள ஒரு மூலகமான y_1 அக்கணத்திலுள்ள மற்ற மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாக விளக்கப்பட்டிருப்பதால் கணம் S_2 ஒருபடிச் சார்புடையதாகும், ஆகவே, S_2-ல் உள்ள வெக்டர்களுள் ஒன்று அதற்கு முன்னுள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். கணம் S_1 ஒருபடிச் சார்பற்ற தாதலின் அவ் வெக்டர் y_1-ஆக இருக்கமுடியாது. எனவே, அவ்வெக்டர் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ வெக்டர்களில் யாதேனும் ஒன்ருகும். அதை x_k என்போம்.

(அ-து) $x_k = c_1 y_1 + d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_{k-1} x_{k-1}, \; c_i, d_j \in F$

இனி, $S_3 = \{ y_1, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \}$

என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொண்டால் $V = L(S_3)$ என்ருகும் ஆகவே, S_2-ல் உள்ள x_k வெக்டரை நீக்கி S_1-ல் உள்ள y_1 வெக்டரைப் பிரதியிட்டு S_3 என்ற கணம் கிடைக்கப்பெற்றுள்ளோம்.

மீண்டும்,

$S_4 = \{ y_2, y_1, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \}$

என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொண்டு மேற்குறிப்பிட்ட முறையில் தொடர்ந்தால் S_3-ல் உள்ள x_j நீக்கப்பெற்று (அதற்குப் பதில்) S_1-ல் உள்ள y_2 பிரதியிடப்பட்ட,

$$S_5 = \{ y_2, y_1, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \}$$

என்ற ஒரு புதிய கணம் $V = L(S_5)$ என்றவாறு கிடைக்கப் பெறுவோம்.

இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்படின் ஒவ்வொரு முறையும் S-ல் உள்ள x-களுள் ஒன்று நீக்கப்பெற்று S_1-ல் உள்ள y-களுள் ஒன்று பிரதியிடப்பட்ட ஒரு புதிய கணம் S_j, $V = L(S_j)$ என்றவாறு கிடைக்கப் பெறுவோம்.

$n \leq m$ எனின், முடிவில் V-ஐ பிறப்பிக்கும்.

$$\{ y_1, y_2, \ldots, y_n, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i\,n-m} \}$$

என்ற கணம் கிடைக்கப் பெறுவோம்.

$n > m$ எனின், முடிவில்

$$\{ y_1, y_2, \ldots, y_m \}$$

என்ற கணம் கிடைக்கப்பெறுவோம். இதிலிருந்து y_{m+1} என்ற வெக்டர் $y_1, y_2, \ldots, y_m$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை என்றாகிறது. அதாவது, y_{m+1} வெக்டர் S_1 கணத்தில் உள்ள அவ் வெக்டருக்கு முந்திய வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை என்றாகும். இது S_1 கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றது என்ற கொள்கைக்குப் பொருந்தாததாம். எனவே, $n \leq m$.

(அ-து) $n \not> m$.

4–30. பரிமாணம் (Dimension)

$V(F)$ என்ற ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியினது யாதேனும் ஒரு அடிப்படைக் கணத்திலுள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கை வெக்டர் வெளி V-ன் பரிமாணம் (Dimension) எனப்படும்.

4–31. தேற்றம்

$V(F)$ ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி (finite dimensional vector space) எனின், V-ன் யாதாமிரு அடிப்படைக் கணங்கள் சம எண்ணிக்கை கொண்ட மூலகங்களைப் பெற்றிருக்கும்.

நிரூபணம்

$$B_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$$
$$B_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$$

என்பவை வெக்டர் வெளி V-ன் இரு அடிப்படைகள் என்க.

B_1-ஐ V-ன் அடிப்படைக் கணமாகவும் B_2-ஐ V-ல் உள்ள ஒரு படிச்சார்பற்ற கணமாகவும் கருதினுல்,

$$n \leq m \qquad (1)$$

மீண்டும், B_2-ஐ V-ன் அடிப்படைக் கணமாகவும் B_1-ஐ V-ல் உள்ள ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாகவும் கருதினுல்,

$$m \leq n \qquad (2)$$

எனவே, (1), (2)-ன் படி,

$$m = n.$$

ஆகவே, B_1, B_2 என்ற வெக்டர் வெளி V-ன் இரு அடிப்படைக் கணங்களது மூலகங்களின் எண்ணிக்கை சமமாகும்.

4-32. தேற்றம்

V (F) ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெர்டர் வெளி, $S_1 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m \}$ என்பது V-ல் உள்ள ஒருபடிச் சார்பற்ற யாதேனும் ஒரு கணம் என்க. S_1 ஒரு அடிப்படைக் கணம் அல்ல எனின், $\{ y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+n} \}$ என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணமாக அமையுமாறு $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$ என்ற வெக்டர்கள் V-ல் உண்டு. (அ-து) V-ல் உள்ள ஒருபடிச் சார்பற்ற யாதேனும் ஒரு கணத்தை V-ன் அடிப்படைக் கணமாக விரிவாக்கலாம்.

நிரூபணம்

V (F) ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி. எனவே, அதற்கு முடிவுள்ள அடிப்படைக் கணம் உண்டு.

அவ்வடிப்படைக் கணம்
$B = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ என்க.

$S_1 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m \}$
என்பது V-ல் உள்ள ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம் ஆகும்.

$S_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$
என்ற ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம்.

V-ன் அடிப்படைக் கணம் B. மேலும், S_1-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் V-ல் உண்டு.

$\therefore$ S_1-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் B-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாக விவரிக்கப்படக் கூடும்.

(அ-து) $y_j = \Sigma\, a_{ij}\, x_i$ — (1), $y_j \in S_1$; $a_{ij} \notin F$.

$x \in V$ எனின்,

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \qquad (\because V\text{-ன் அடிப்படை } B)$$

$$= \sum_j o_j y_j + \sum_i b_i x_i \qquad (\because \text{ களத்தில் } o \text{ கூட்டு சர்வ சம மூலகமாகும்})$$

$\therefore \quad x \in L(S_2)$.

$$\therefore \quad V \subset L(S_2) \quad - (2)$$

மீண்டும், $y \in L(S_2)$,

$$y = \sum_j b_j y_j + \sum_i c_i x_i, \quad b_j, c_i \in F.$$

$$= \sum b_j (\sum a_{ij} x_i) + \sum c_i x_i, \quad (\because y_j = \sum a_{ij} x_i)$$

$$= \sum_i (\sum a_{ij} b_j + c_i) x_i$$

$\therefore \quad y \in V \quad (\because V\text{-ன் அடிப்படை } B)$

எனவே, $L(S_2) \subset V. \quad - (3)$

(2), (3)-ன் படி,

$$V = L(S_2).$$

மேலும் (1)-ன் படி,

$$y_j = \sum_i a_{ij} x_i$$

$$= o y_1 + o y_2 + \dots + o.\, y_{j-1} + o.\, y_{j+1} + \dots o y_m + \sum a_{ij} x_i$$

$$= \sum_{i \neq j} o_i y_i + \sum a_{ij} x_i$$

(அ-து) S_2-ல் உள்ள ஒரு மூலகம் அதிலுள்ள ஏனைய மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாக விவரிக்கப்படும். எனவே, S_3 ஒருபடிச் சார்புடையது. ஆனால், $y_1, y_2, \dots, y_m$ என்ற வெக்டர்களில் எதையும் அவ்வாறு விவரிக்க இயலாது. ($\because$ S_1 ஒருபடிச் சார்பற்றது). எனவே, அத்தகைய வெக்டர் $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பனவற்றில் யாதேனும் ஒன்றுய் இருத்தல் வேண்டும். அது $x_k \in B$ என்க.

(அ-து) $x_k = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_m y_m + l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_{k-1} x_{k-1}$

இப்பொழுது,

$$S_3 = \{ y_1, y_2, \dots, y_m, \ x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \}$$

என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(அ-து) S_3 என்பது x_k வெக்டரைத் தவிர்த்து மற்ற S_2-ல் உள்ள அனைத்து வெக்டர்களையும் கொண்டது.

நாம் இப்பொழுது $L(S_3) = V$ என நிறுவுவோம். பின் S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றதெனின் அது S_1-ஐ விரித்துக் கிடைக்கப் பெற்ற அடிப்படைக் கணமாகும்.

$S_3 \subset S_2$ ஆதலின் $L(S_3) \subset L(S_2)$.

$L(S_2) \subset V$ ஆதலின் $L(S_3) \subset V$ – (4)

மேலும், $x \in V$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

$$= \sum_{i \neq k} b_i x_i + b_k x_k$$

$$= \sum b_i x_i + b_k (d_1 y_1 + \ldots + d_m y_m + l_1 x_1 + \ldots + l_{k-1} x_{k-1})$$

(அ-து) x வெக்டர் S_3-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாகும்.

$\therefore \quad x \in L(S_3)$.

எனவே, $V \subset L(S_3)$. – (5)

(4), (5)-ன் படி, $V = L(S_3)$.

$S_3 \subset V$ ஆதலின் S_3 ஒருபடிச் சார்புடையதாகவோ அல்லது ஒருபடிச் சார்பற்றதாகவோ இருக்கும். ஒருபடிச் சார்பற்றதெனின் S_3 கணம் S_1-ல் இருந்து விரிவாக்கப்பட்ட அடிப்படைக் கணமாகும். S_3 ஒருபடிச் சார்புடைய தெனின், S_l என்ற ஒரு கணம்,

(i) $L(S_l) = V$

(ii) S_l ஒருபடிச் சார்பற்றது

என்ற கட்டுப்பாட்டில் கிடைக்கும் வரை மேற் கூறிய முறையில் தொடரலாம். எனவே, S_1-ல் இருந்து விரிவாக்கப்பட்ட கணமான S_l வெக்டர் வெளி V-ன் அடிப்படைக் கணமாகும்.

மேற்குறிப்பிட்டவாறு தொடர்ந்தால் நமக்குக் கிடைக்கப் பெறும் அதிகபட்சமான கணம் $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ ஆகும். இது ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும். இது V-ன் அடிப்படைக் கணமாகும்.

4-33. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியின் W_1 என்ற உள்வெளிக்கு ஒத்த உள்வெளி W_2,

$$V = W_1 \oplus W_2$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உண்டு.

நிரூபணம்

V முடிவுள்ள பரிமாணம் உள்ளதாதலின், W_1-ம் முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்டதாகும்.

$$S_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$$

என்பது W_1-ன் அடிப்படைக் கணம் என்க. பின் அது ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும். எனவே, S_1-ஐ V-ன் அடிப்படைக் கணமாக விரிவாக்கக்கூடும். அதை S_2 என்க.

(அ-து) $S_2 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}, n \geq m.$

எனவே, $S_3 = \{ x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n \}$

என்ற $(n-m)$ வெக்டர்கள் கொண்ட கணம் S_2-ன் உட்கணமாதலின் ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

நாம் W_2 என்ற உள்வெளி
$$V = W_1 \oplus W_2$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது என நிறுவவேண்டும்.

அதற்கு $W_2 = L(S_3)$ என எடுத்துக் கொண்டு,

(a) W_2 ஓர் உள்வெளி

(b) $V = W_1 + W_2$

(c) $W_1 \cap W_2 = \{ o \}$

என நிறுவ வேண்டும்.

(a) W_2 ஓர் உள்வெளி.

$x, y \in W_2$ என்க.

$\because \quad W_2 = L(S_3),$

$$x = a_{m+1} x_{m+1} + a_{m+2} x_{m+2} + \ldots + a_n x_n = \Sigma a_i x_i$$
$$y = b_{m+1} x_{m+1} + b_{m+2} x_{m+2} + \ldots + b_n x_n = \Sigma b_i x_i$$

$\therefore \quad x, y \in W_2 ; K_1, K_2, \in F,$

$$K_1 x + K_2 y = K_1 \Sigma a_i x_i + K_2 \Sigma b_i x_i$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} (K_1 a_i + K_2 b_i) x_i,$$

$= S_3$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருப்படிச் சேர்க்கை.

$\therefore \quad K_1 x + K_2 y \in W_2.$

எனவே, W_2 ஓர் உள் வெளியாகும்.

(b) $\mathbf{V = W_1 + W_2}$

$z \in V$ என்க.

$\therefore \quad z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \quad (\because$ V-ன் அடிப்படை $S_2)$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i$$

$= W_1$-ன் மூலகம் $+$ W_2-ன் மூலகம்

$\therefore \quad z \in W_1 + W_2.$

(அ-து) $V \subset W_1 + W_2,$

மீண்டும்,

$z \in W_1 + W_2$ என்க.

$\therefore \quad z = W_1$-ல் உள்ள ஒரு வெக்டர் $+$ W_2-ல் உள்ள ஒரு வெக்டர்

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{i=m+1} a_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

$\therefore \quad z \in V$

எனவே, $W_1 + W_2 \subset V.$

$\therefore \quad V = W_1 + W_2.$

(c) $\mathbf{W_1 \cap W_2 = \{ o \}}$

$z \neq o \in W_1 \cap W_2$ என்க.

$\therefore \quad z \in W_1, \quad z \in W_2.$

(அ-து) $z = \sum_{i=1}^{m} a_j x_i = \sum_{j=m+1}^{n} b_j x_j$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_i - \sum_{j=m+1}^{n} b_j x_j = o$$

S_2 ஒருபடிச் சார்பற்றதாதலின்

$a_1 = o, a_2 = o, \ldots, a_m = o$

$b_{m+1} = o, b_{m+2} = o, \ldots, b_n = o.$

$\therefore \quad z = o$

எனவே, $W_1 \cap W_2 = \{ o \}$

4-34. ஒருபடி கூட்டலின் பரிமாணம்—தேற்றம் (Dimension of a linear sum)

$V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியின் உள் வெளிகள் W_1, W_2 எனின்,

பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2

= பரிமாணம் $(W_1 + W_2)$ + பரிமாணம் $(W_1 \cap W_2)$

மேலும், $V = W_1 \oplus W_2$ எனின்,

பரிமாணம் V = பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2.

நிரூபணம்

V முடிவுள்ள பரிமாண வெளியாதலின், W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ ஆகியவை முடிவுள்ள பரிமாணமுள்ளவையாம்.

$S_1 = \{ z_1, z_2, \ldots, z_k \}$

என்பவை $W_1 \cap W_2$ என்ற வெளியின் அடிப்படை என்க.

$\therefore$ பரிமாணம் $(W_1 \cap W_2) = K$.

மேலும், S_1 ஒருபடிச் சார்பற்றவையாம்.

$W_1 \cap W_2$ என்பது W_1, W_2 ஆகிய இரண்டினதும் உள்வெளி யாகும். எனவே, $W_1 \cap W_2$ என்ற உள்வெளியினது அடிப்படைக் கணம் S_1-ஐ அது W_1, W_2 ஆகியவற்றிற்கும் அடிப்படைக் கணமாக இருக்குமாறு விரிவாக்கலாம்.

$S_2 = \{ z_1, z_2, \ldots, z_k, x_1\ x_2 \ldots, x_l \}$,

W_1 என்ற வெளியினது அடிப்படைக் கணம் எனவும்,

$S_3 = \{ z_1, z_2, \ldots, z_k, y_1, y_2, \ldots, y_m \}$,

W_2 என்ற வெளியினது அடிப்படைக் கணம் எனவும் கொள்க.

$\therefore$ பரிமாணம் $W_1 = k + l$

பரிமாணம் $W_2 = k + m$.

இனி, நாம்

பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2

= பரிமாணம் $(W_1 + W_2)$ + பரிமாணம் $(W_1 \cap W_2)$

என நிறுவுவோம்.

(அ-து) $(k + l) + (k + m)$ = பரிமாணம் $(W_1 + W_1) + k$

(அ-து) பரிமாணம் $(W_1 + W_2) = k + l + m$

என நிறுவுவோம்.

இதற்கு $(k+l+m)$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணத்தை (S_4 என்க), $L(S_4) = W_1 + W_2$ என்றவாறு காண்போம்.

எனவே,

$$S_4 = \{z_1, z_2, \ldots, z_k,\ x_1, x_2, \ldots, x_l, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

என்க.

இனி நாம் பின் வருவனவற்றை நிறுவுவோம்.

(a) S_4 ஒருபடிச் சார்பற்றது.

(b) $L(S_4) = W_1 + W_2$.

(a) $\sum_{j=1}^{k} c_i\ z_i + \sum_{j=1}^{l} a_j\ x_j + \sum_{k=1}^{m} b_k\ y_k = 0$ (1) என்க.

$$\therefore\ \sum c_i\ z_i + \sum a_j\ x_j = -\sum b_k\ y_k$$

இடப்பக்கமுள்ளது S_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாகும்.

$$\therefore\ \sum c_i\ z_i + \sum a_j\ x_j \in W_1.$$

அடுத்து, $-\sum b_k\ y_k = -\sum b_k\ y_k + \sum o_i\ z_i$

(அ-து) $\sum b_k\ y_k$ என்பது S_3-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாகும்.

$$\because\ \sum b_k\ y_k \in W_2$$

மேலும், $\sum c_i\ z_i + \sum a_j\ x_j = -\sum b_k\ y_k \in W_1$

$$\therefore\ \sum b_k\ y_k \in W_1 \cap W_2$$

$W_1 \cap W_2$-ன் அடிப்படைக் கணம் S_1 ஆகும்.

$$\therefore\ \sum b_k\ y_k = d_1\ z_2 + d_2\ z_2 + \ldots + d_k\ z_k$$
$$= \sum d_p\ z_p$$

$$\therefore\ \Sigma\ b_k\ y_k - \Sigma\ d_p\ z_p = o$$

எனவே, $b_1, b_2, \ldots, b_m, d_1, b_2, \ldots, d_k$ என்ற திசையிலிகள் அனைத்தும் பூச்சியமாகும்.

எனவே, (1) பின் வருமாறு ஒடுங்குகிறது.

$$\Sigma\ c_i\ z_i + \Sigma\ a_j\ x_j = o$$

(அ-து) ஒருபடிச் சார்பற்ற S_2 கணத்தின் மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை பூச்சியமாகும்.

$\therefore\ c_1, c_2, \ldots, c_k;\ a_1, a_2, \ldots, a_l$ ஒவ்வொன்றும் o.

அதாவது, $a_i = o,\ i = 1, 2, ..., l$
$b_j = o,\ j = 1, 2, ..., m$
$c_p = o,\ p = 1, 2, ..., k.$

(அ-து) $\Sigma\ c_i z_i + \Sigma\ a_j x_j + \Sigma\ b_k y_k = o$
$\Rightarrow\ c_i = o\ \forall i,\ a_j = o\ \forall j,\ b_k = o\ \forall\ k.$

எனவே, S_4 ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாகும்.

(b) $z \in W_1 + W_2$ என்க.

$\therefore\ z = x + y,\ \ x \in W_1,\ y \in W_2.$

(அ-து) $z = S_2$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்ச்கை
$+ S_3$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை.
$= S_4$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை

$\therefore\ z \in L(S_4).$

எனவே, $W_1 + W_2 \subset L(S_4).$ —(2)

அடுத்து, $z \in L(S_4)$

மேற்குறிப்பிட்டவாறு நேர்மாறான வரிசையில் தொடர்ந்தால்

$$z \in W_1 + W_2$$

எனக் காண்கிறோம்.

$\therefore\ L(S_4) \subset W_1 + W_2$ —(3)

(2), (3)–லிருந்து $L(S_4) = W_1 + W_2.$

எனவே, S_4 என்பது $(W_1 + W_2)$-ன் அடிப்படையாம்.

இதன் பரிமாணம் $(k+l+m)$ ஆகும்.

$\therefore$ பரிமாணம் $(W_1 + W_2) = k+l+m$
$= (k + l) + (k + m) - m$
$=$ பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2
— பரிமாணம் $(W_1 \cap W_2)$

(அ-து) பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2 = பரிமாணம் $(W_1 + W_2)$
+ பரிமாணம் $(W_1 \cap W_2)$

$V = W_1 \oplus W_2$ எனின், $W_1 \cap W_2 = \{o\}$

$\therefore$ பரிமாணம் $(W_1 \cap W_2) = o.$

எனவே, பரிமாணம் V = பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2.

4-35. நேரான தொகையின் பரிமாணம் — தேற்றம் (Dimension of direct sum)

W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகளது நேரான தொகை $V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெளி எனின்,

பரிமாணம் V = பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2.

நிரூபணம்

பரிமாணம் $W_1 = l$, பரிமாணம் $W_2 = m$ என்க.

($\because$ V முடிவுள்ள பரிமாண வெளியாதலின், W_1, W_2-ம் முடிவுள்ள பரிமாண உள் வெளிகளாகும்)

$$\therefore \quad S_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_l \}$$
$$S_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m \}$$

என்பவை முறையே W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகளது அடிப்படைகள் என்போம்.

$$S_3 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_l, y_1, y_2, \ldots, y_m \}$$

என்ற கணம் V-ன் அடிப்படைக் கணம் என முதலில் நிறுவுவோம். அதாவது,

(a) S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றது

(b) $L(S_3) = V$

என நிறுவுவோம்.

(a) S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றது—

$$\sum_{i=1}^{l} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = o$$

என்ற தொடர்பை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\Sigma\, a_i x_i = -\, \Sigma\, b_j y_j$$

இடப்பக்கம் உள்ளது S_1-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாதலின் அது W_1-ல் உள்ள ஒரு வெக்டராகும். வலப்பக்கம் உள்ளது S_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாதலின் அது W_2-ல் உள்ள ஒரு வெக்டராகும்.

இரண்டும் சமமாதலின் ஒவ்வொன்றும் W_1, W_2 ஆக இரண்டிலும் உள்ளது. (அ-து) $W_1 \cap W_2$-ல் உள்ளது.

$$\therefore \quad \Sigma\, a_i x_i \in W_1 \cap W_2, \; -\, \Sigma\, b_j x_j \in W_1 \cap W_2.$$

V வெளி W_1, W_2 உள்வெளிகளது நேரான தொகையாதலின்,

$$W_1 \cap W_2 = \{o\}$$
$$\therefore \quad \Sigma\, a_i x_i = o, \; \Sigma\, b_j y_j = o$$

S_1, S_2 ஆகிய இரண்டும் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாதலின்,

$a_1 = o, a_2 = o, \ldots, a_l = o; \; b_1 = o, b_2 = o, \ldots, b_m = o.$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{l} a_i x_i + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = o$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_l = o, \; b_1 = b_2 = \ldots = b_m = o$$

$\therefore$ S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும்.

(b) $L(S_3) = V$.

$$V = W_1 \oplus W_2 \text{ ஆதலின்,}$$

$z \in V = x + y, \; x \in W_1, y \in W_2$

$\Rightarrow \; z = \Sigma a_i x_i + \Sigma b_j y_j$

$\Rightarrow \; z = S_3$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை

$\Rightarrow \; z \in L(S_3)$.

$\therefore \; V \subset L(S_3)$ —(2)

மேலும்,

$z \in L(S_3) \Rightarrow z = \Sigma a_i x_i + \Sigma b_j y_j$

$\Rightarrow \; z = x + y, \; x \in W_1, y \in W_2$

$\Rightarrow \; z \in V$.

$\therefore \; L(S_3) \subset V$ —(3)

(2), (3)-ன் படி,

$$V = L(S_3).$$

$\therefore \; S_3$ என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணமாகும்.

எனவே,

பரிமாணம் $V = l + m$

$= $ பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_2.

4–36. ஈவு வெளியின் பரிமாணம்

$V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெளியின் ஓர் உள்வெளி W எனின்,

$$\text{பரிமாணம் } \frac{V}{W} = \text{பரிமாணம் } V - \text{பரிமாணம் } W.$$

$\left(\frac{V}{W} = \{ W + x : x \in V \} \right.$ என்பது ஈவு வெளியாகும். $\left. \right)$

V-ன் பரிமாணம் n, W-ன் பரிமாணம் m என்க.

$$S_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$$

என்பது W-ன் அடிப்படைக் கணமாகக் கொள்வோம்.

எனவே, S_1 ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

$\therefore \; S_1$-ஐ $(l + m)$ வெக்டர்கள் கொண்ட V-ன் அடிப்படைக் கணமாக (S_2 என்க) விரிவாக்கலாம்.

$S_2 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_l \}$ என்க.

$\therefore \; V$-ன் பரிமாணம் $= l + m$.

இனி $\frac{V}{W}$ என்ற ஈவு வெளியின் அடிப்படைக் கணத்தைக் காண்போம்.

(அ-து) $S_3 = \{ W + y_1, W + y_2, ..., W + y_l \}$

என்ற கணம்

(a) S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றது

(b) $L(S_3) = \frac{V}{W}$

என்று நிறுவுவோம்.

(a) S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றது.

$$\sum_{i=1}^{l} b_i (W + y_i) = o$$

$\Rightarrow \quad W + \Sigma b_i y_i = W \qquad (\because \quad W + x = W, x \in W)$

$\Rightarrow \quad \Sigma b_i y_i \in W$

$\Rightarrow \quad \Sigma b_i y_i = S_1$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை

$\Rightarrow \quad \Sigma b_i y_i = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$

$\Rightarrow \quad \Sigma b_i y_i - \Sigma a_j x_j = o$ (S_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை)

$\Rightarrow \quad b_i = o, a_j = o, \quad \forall i = 1, 2, ..., l$

$\qquad\qquad j = 1, 2, ..., m$

எனவே, S_3 ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

(b) $L(S_3) = \frac{V}{W}$.

$z \in \frac{V}{W}$ என்க.

$\therefore \quad z = W + x, \quad x \in V$

$\Rightarrow \quad z = W +$ (S_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை)

$\Rightarrow \quad z = W + \sum_{j=1}^{m} a_j x_j + \sum_{i=1}^{l} b_i y_i$

$\Rightarrow \quad z = W + x + \Sigma b_i y_i \quad (\because \quad x = \Sigma a_j x_j \in W)$

$\Rightarrow \quad z = W + \Sigma b_i y_i \quad (\because \quad x \in W, W + x = W)$

$$\Rightarrow \quad z = W + (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots b_l y_l)$$
$$\Rightarrow \quad z = (W + b_1 y_1) + (W + b_2 y_2) + \ldots + (W + b_l y_l)$$
$$\Rightarrow \quad z = b_1 (W + y_1) + b_2 (W + y_2) + \ldots + b_l (W + y_l)$$
$\Rightarrow \quad z = S_3$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை
$$\Rightarrow \quad z = \in L (S_3),$$
$$\therefore \quad \frac{V}{W} \subset L (S_3).$$

மீண்டும் நேர்மாறான முறையில் தொடர்ந்தால்,

$$z \in L (S_3) \Rightarrow \quad z \in \frac{V}{W}.$$

$$\therefore \quad L (S_3) \subset \frac{V}{W}.$$

எனவெ, $L (S_3) = \frac{V}{W}$,

$\therefore$ S_3 என்பது $\frac{V}{W}$–ன் அடிப்படைக் கணம்.

மேலும் $\frac{V}{W}$ -ன் பரிமாணம் l.

எனவே,
$\frac{V}{W}$ -ன் பரிமாணம் $= l = n-m \quad (\because \; n = l + m)$

$=$ பரிமாணம் V — பரிமாணம் W.

4–37. உள்வெளிகளது நேரானதொகை (Direet Sum of subspaces)

V என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகள் $W_1, W_2, \ldots, W_n$ என்க. $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டரும்

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad x_i \in W_i \;\; \forall i$$

என்று ஒரே முறையில் (uniquely) விளக்கப்படுமெனின், $W_1, W_2, \ldots, W_n$ என்ற உள்வெளிகளது நேரான தொகை V எனப் படும். இது,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

எனக் குறிப்பிடப்படும்.

4–38. தேற்றம்

$W_1, W_2, \ldots, W_k$ என்பவை $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகள், $B_1, B_2, \ldots, B_k$ என்பவை முறையே அவற்றின் அடிப்

படைகள் என்போம். பின் $\bigcup B_i$ என்பது V-ன் ஓர் அடிப்படை யாக இருந்தால் மட்டுமே V என்பது அவ்வுள் வெளிகளது நேரான தொகை எனப்படும்.

நிரூபணம்

$B_1 = \{ y_1', y_2', \ldots, y_k' \}$ என்பது W_1-ன் அடிப்படை
$B_2 = \{ y_1'', y_2'', \ldots, y_l'' \}$ என்பது W_2-ன் அடிப்படை

என்க.

$V = W_1 \oplus W_2$ என்க.

$\therefore \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in W_1, x_2 \in W_2.$

$$\therefore \quad x = (c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_k' y_k') + (c_1'' y_1'' + c_2'' y_2'' + \ldots + c_l'' y_l'')$$

(அ-து) V-ல் உள்ள ஒரு வெக்டர் B_1, B_2 என்ற அடிப்படைகளில் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். அதாவது, V-ல் உள்ள வெக்டர் $B_1 \cup B_2$ என்ற கணத்திலுள்ள அனைத்து மூலகங் களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாம்.

அடுத்து, $B_1 \cup B_2$ ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம் என நிறுவுவோம்.

W_1, W_2 இரண்டும் சார்பற்றவையாதலின்,

$x_1 + x_2 = o \Rightarrow x_1 = o, x_2 = o.$

எனவே, $c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_k' y_k' = o$
$c_1'' y_1'' + c_2'' y_2'' + \ldots + c_l'' y_l'' = o$

$B_1. B_2$ இரண்டும் ஒருபடிச் சார்பற்றவை.

$\therefore \quad c_1' = o, c_2' = o, \ldots, c_k' = o$
$c_1'' = o, c_2'' = o, \ldots, c_l'' = o.$

$\therefore \quad B_1 \cup B_2$ ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாகும்.

எனவே, $B_1 \cup B_2$ என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணமாகும். (அ-து) $V = W_1 \oplus W_2$ எனின், $B_1 \cup B_2$ என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணமாம்.

d_i என்பது W_i உள்வெளியின் பரிமாணம் என்க.

$B_i = \left\{ \overset{i}{y_1}, \overset{i}{y_2}, \ldots, \overset{i}{y_{d_i}} \right\}$ என்பது W_i-ன் அடிப்படை என்போம்.

இனி $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ என்பது V-ன் ஓர் அடிப்படை என நிறுவுவோம்

ஒருபடிச் சேர்க்கை

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ என்க.

$\therefore \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x \in V, \; x_i \in W_i \; \forall i$

$\because \quad x_i = c_1^i x_1^i + c_2^i x_2^i + \ldots + c_{di}^i x_{di}^i,$

$$= \sum_{j=1}^{di} c^i_j x^i_j ,$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{di} c_j^i x_j^i \right\}$$

எனவே, $x \in V$ என்ற எந்த ஒரு வெக்டரும் $\bigcup B_i$-ல் உள்ள அனைத்து மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

ஒருபடிச் சார்பற்றவை

மேலும், $W_1, W_2, \ldots, W_k$ சார்பற்றவைகளாகும்.

எனவே, $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k = o$

$\Rightarrow \quad x_1 = o, \; x_2 = o, \ldots, x_k = o$

$$\Rightarrow \quad \sum_{1}^{d_1} c_j^1 x_j^1 = o, \; \sum_{1}^{d_2} c_j^2 x_j^2 = o, \ldots, \sum_{1}^{d_k} c_j^k x_j^k = o$$

$\Rightarrow \quad c_j^i = o, \; j = 1, 2, \ldots, d_i \; ; \; i = 1, 2, \ldots, k.$

$\therefore \; \bigcup B_i$ ஓர் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமாகும். அதாவது, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ எனின், $B = \bigcup B_i$ என்பது V-ன் ஓர் அடிப்படையாகும்.

இனி $B = \bigcup B_i$ என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணமாகக் கொண்டு முன் பின்னுக்கித் தொடர்ந்தால் $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ என நிறுவலாம்.

குறிப்பு :

$W_1, W_2, \ldots, W_n$ என்பவை V-ன் உள்வெளிகள் என்க. $x \in V, \; x_i \in W_i$ என்போம். பின் $W_1, W_2, \ldots, W_n$ சார்பற்றவை எனின்,

$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = o \Rightarrow x_i = o \; \forall i.$

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. V (F) என்ற வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் n எனின், n-க்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களைக் கொண்ட V-ன் ஒவ்வோர் உட்கணமும் ஒருபடிச் சார்புடையதாகும் என நிறுவுக.

n வெக்டர்களுக்கு மேற்பட்ட மூலகங்களைக் கொண்ட கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற தெனின், அது V-ன் அடிப்படைக் கணமாக இருக்கக்கூடும்; அல்லது அதை விரிவாக்கி V-ன் அடிப்படைக் கணம் எனக் காணலாம். இரு விதங்களிலும் V-ன் அடிப்படைக் கணத்தின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை n-க்கு மேற்பட்டதாகும். அதாவது, V-ன் பரிமாணம் $>n$. ஆனால், வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் n ஆதலின், இது முற்றும் பொருந்தாது.

எனவே, n-க்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களைக் கொண்ட உட் கணம் ஒருபடிச் சார்புடையதாகும்.

2. V_n (F)-ன் அடிப்படைக் கணம் $S = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots (0, 0, \ldots, 1)\}$ என நிரூபி.

S அடிப்படைக் கணம் என நிரூபிக்க

(*a*) S ஒருபடிச் சார்பற்றது

(*b*) $L(S)\ V$

என நிரூபிக்கவேண்டும்.

(a) S ஒருபடிச் சார்பற்றது.

n திசையிலிகள் $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ என்க.

$$\therefore \quad a_1 (1, 0, \ldots, 0) + a_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n (0, 0, \ldots, 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad a_1 = o,\ a_2 = o, \ldots, a_n = o$$

எனவே, S ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

(b) L (S) = V.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 (1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n (0, 0, \ldots, 1)$$

(அ-து) V-ல் உள்ள n-வெக்டர் ஒவ்வொன்றும் S-ன் மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். $\therefore\ L(S) = V$.

எனவே, V-ன் அடிப்படைக் கணம் S ஆகும்.

3. $ad - bc \neq o$ எனின், $S = \{a + ib,\ c + id\}$ என்ற கணம் C (R)-ன் அடிப்படை என நிரூபி.

$$K_1 (a + ib) + K_2 (c + id) = o$$
$$\Rightarrow \quad (K_1 a + K_2 c) + i\ (K_1 b + K_2 d) = o$$
$$\Rightarrow \quad K_1 a + K_2 c = o,\ K_1 b + K_2 d = o \quad —(1)$$
$$\Rightarrow \quad K_1 ab + K_2 cb = o,\ K_1 ab + K_2 ad = o$$
$$\Rightarrow \quad K_2 (ad - bc) = o$$

$(ad - bc) \neq o$, எனின், $K_2 = o$

$K_2 = o$ எனின், (1)-லிருந்து $K_1 = o$.

(அ-து) $K_1(a+ib)+K_2(c+id)=o$

$\Rightarrow K_1=o,\ K_2=o.$

$\therefore$ S ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

மீண்டும்,

$x+iy=K_1(a+ib)+K_2(c+id)$ என்க.

$\therefore\ x=K_1a+K_2c,\ y=K_1b+K_2d$

$\therefore\ K_1=\dfrac{dx-cy}{ad-bc},\ K_2=\dfrac{bx-ay}{bc-ad},\ ad-bc\neq o.$

(அ-து) $c(R)$-ல் உள்ள ஒரு மூலகம் S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒரு படிச் சேர்க்கையாகும்.

எனவே, $ad-bc\neq o$ எனின், S-கணம் $c(R)$-ன் அடிப்படையாகும்.

4. $V_3(c)$-ன் அடிப்படை $S=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ என நிரூபி. மேலும் $(2+3i, 4i, 2-3i)$ என்ற வெக்டரின் கூறுகளைக் காண்க.

$a_1(1,0,0)+a_2(1,1,0)+a_3(1,1,1)=o$

$\Rightarrow (a_1+a_2+a_3,\ a_2+a_3,\ a_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3=o,\ a_2+a_3=o,\ a_3=o.$

$\Rightarrow a_1=o,\ a_2=o,\ a_3=o.$

$\therefore$ S ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

மீண்டும்,

$(a_1,a_2,a_3)=K_1(1,0,0)+K_2(1,1,0)+K_3(1,1,1)$

$=(K_1+K_2+K_3,\ K_2+K_3,\ K_3)$

$\therefore\ K_1+K_2+K_3=a_1,\ K_2+K_3=a_2,\ K_3=a_3$

$\therefore\ K_3=a_3,\ K_2=a_2-a_3,\ K_1=a_1-a_2$

$\therefore\ (a_1,a_2,a_3)-(a_1-a_2)(1,0,0)+(a_2-a_3)(1,1,0)+a_3(1,1,1)$

$\therefore\ L(S)=V_3$

$\therefore$ $V_3(c)$-ன் அடிப்படைக் கணம் S.

அடுத்து, $a_1=2+3i,\ a_2=4i,\ a_3=2-3i$ என்க.

$(a_1,a_2,a_3)=(a_1-a_2)(1,0,0)+(a_2-a_3)(1,1,0)+a_3(1,1,1)$

$\therefore\ (2+3i,4i,2-3i)$

$=(2+3i-4i)(1,0,0)+(4i-\overline{2-3i})(1,1,0)+(2-3i)(1,1,1)$

$=(2-i)(1,0,0)+(-2+7i)(1,1,0)+(2-3i)(1,1,1)$

எனவே, $(2+3i, 4i, 2-3i)$ என்ற வெக்டரது கூறுகள்

$2-i, \ -2+7i, \ 2-3i.$

5. $\mathbf{x} = (0, 1, a)$ என்ற வெக்டர் $\mathbf{y} = (3, 1, -2)$, $\mathbf{z} = (2, 1, -1)$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானம் எனின் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$(0, 1, a) = K_1 (3, 1, -2) + K_2 (2, 1, -1)$ என்க.

$\therefore \ (0, 1, a) = (3K_1 + 2K_2, K_1 + K_2, -2K_1 - K_2)$

$\therefore \ 3K_1 + 2K_2 = 0 \quad -(1)$

$K_1 + K_2 = 1 \quad -(2)$

$-2K_1 - K_2 = a \quad -(3)$

(1), (2)–லிருந்து $K_1 = -2, \ K_2 = 3$

எனவே, (3)-லிருந்து

$-2(-2) - (3) = a$

(அ-து) $a = 1$

6. $V_3 (R)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் அடிப்படை $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ எனின், $\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \ \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \ \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1\}$ என்பதும் $V_3 (R)$-ன் அடிப்படை என நிரூபி.

$a, b, c \in R$ எனின்,

$a(x_1 + x_2) + b(x_2 + x_3) + c(x_3 + x_1) = 0 \quad -(1)$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$x_1 (a + c) + x_2 (a + b) + x_3 (b + c) = 0$ என்றாகும்.

$\therefore \ a + c = 0, \ a + b = 0, \ b + c = 0$ ($\because \{ x_1, x_2, x_3 \}$ ஒருபடிச் சார்பற்றது).

$\therefore \ a = 0, \ b = 0, \ c = 0.$

எனவே, (1)-லிருந்து

$\{ x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1 \}$ ஒருபடிச் சார்பற்றதாம்.

மீண்டும், $x \in V_3 (R)$ எனின்,

$x = p(x_1 + x_2) + q(x_2 + x_3) + r(x_3 + x_1)$

$= (p + r) x_1 + (p + q) x_2 + (q + r) x_3$

$S = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ என்பது $V_3 (R)$-ன் அடிப்படை யாதலின்

$x = S$-ன் மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை

$= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$

$\therefore \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$
$= (p + r) x_1 + (p + q) x_2 (q + r) x_3$

$\therefore \quad b_1 = p + r, \ b_2 = p + q, \ b_3 = q + r.$

எனவே, $p = \dfrac{b_1 + b_2 - b_3}{2}, \ q = \dfrac{-b_1 + b_2 + b_3}{2},$

$r = \dfrac{b_1 - b_2 + b_3}{2}$

b_1, b_2, b_3 என்பவை அனைத்தும் பூச்சியமில் திசையிலிகள்

$\therefore \quad p, q, r$ என்பவை அனைத்தும் பூச்சியமில் திசையிலிகள்.

$\therefore \quad x = p (x_1 + x_2) + q (x_2 + x_3) + r (x_3 + x_1)$

$= \dfrac{b_1 + b_2 - b_3}{2} (x_1 + x_2)$

$+ \dfrac{-b_1 + b_2 + b_3}{2} (x_2 + x_3) + \dfrac{b_1 - b_2 + b_3}{2} (x_3 + x_1)$

$= (x_1 + x_2, \ x_2 + x_3, \ x_3 + x_1)$-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

எனவே, $(x_1 + x_2, \ x_2 + x_3, \ x_3 + x_1)$ எனும் கணம் $V_3 (R)$-ஐ பிறப்பிக்கின்றது. மேலும், இக் கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றது.

$\therefore \quad (x_1 + x_2, \ x_2 + x_3, \ x_3 + x_1)$ என்பது $V_3 \ (R)$-ன் அடிப்படைக் கணமாகும்.

7. V (R) என்பது n × n அணிகள் கொண்ட வெக்டர் வெளி, W_1, W_2 என்பவை முறையே சமச்சீர் (Symmetric) சமச்சீரற்ற (anti symmetric) அணிகள் என்க. W_1, W_2 இரண்டும் n^r அணிகள் எனின்,

$$V = W_1 \oplus W_2$$

என நிரூபி.

நிரூபணம்

A ஒரு $n + n$ அணி. A' அதன் திருப்பு அணி (Transpose) என்க.

$\therefore \quad A = \frac{1}{2} (A + A') + \frac{1}{2} (A - A')$
$= P + Q , \ P = \frac{1}{2} (A + A'), Q = \frac{1}{2} (A - A')$
$P' = [\frac{1}{2} (A + A')]' = \frac{1}{2} [A' + (A')'] = \frac{1}{2} [A' + A]$
$= \frac{1}{2} [A + A'] = P.$

$$Q' = [\tfrac{1}{2}(A-A')]' = \tfrac{1}{2}[A'-(A')']$$
$$= \tfrac{1}{2}[A'-A] = -\tfrac{1}{2}[A-A'] = -Q.$$

எனவே, P சமச்சீர் அணி $\therefore P \in W_1$

Q சமச்சீரற்ற அணி $\therefore Q \in W_2$

எனவே, $A = P + Q,\ P \in W_1,\ Q \in W_2.$

அடுத்து இத்தகைய விளக்கம் ஒரே முறை விளக்கம் என நிறுவுவோம்.

இயலுமெனின், $A = P_1 + Q_1,\ P_1 \in W_1,\ Q_1 \in W_2$

$\therefore\ P_1' = P_1,\ Q_1' = -Q_1$

எனவே, $A' = (P_1 + Q_1)' = P_1' + Q_1' = P_1 - Q_1$

(அ-து) $A = P_1 + Q_1,\ A' = P_1 - Q_1.$

ஆகவே, $P = \tfrac{1}{2}(A + A') = \tfrac{1}{2}[P_1 + Q_1 + P_1 - Q_1] = P_1$

$Q = \tfrac{1}{2}(A - A') = \tfrac{1}{2}[P_1 + Q_1 - P_1 + Q_1] = Q_1$

எனவே, $A = P + Q$ என்பது ஒரே முறை (unique) விளக்கம்.

(அ-து) $A \in V$ என்ற ஒரு மூலகம்.

$A = P + Q,\ P \in W_1,\ Q \in W_2$ என்று ஒரே முறையில் விளக்கப் படும்.

$$\therefore\ V = W_1 \oplus W_2.$$

8. அனைத்து 2 × 2 அணிகளது வெக்டர்வெளி V என்க. அணிக்கோவை பூச்சியம் கொண்ட அனைத்து 2 × 2 அணிகளது கணம் W எனின், W என்பது V-ன் உள்வெளி அல்ல என நிரூபி.

$A = \begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} o & o \\ o & b \end{pmatrix};\ a, b \in R$ என்க.

$|A| = \begin{vmatrix} a & o \\ o & o \end{vmatrix} = o,\quad |B| = \begin{vmatrix} o & o \\ o & b \end{vmatrix} = o$

$\therefore\ A \in W,\ B \in W,$

ஆனல், $A + B = \begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o & o \\ o & b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & o \\ o & b \end{pmatrix}$

$\therefore\ |A + B| = \begin{vmatrix} a & o \\ o & b \end{vmatrix} = ab \neq o$

$\therefore\ A + B \notin W.$

(அ-து) $A, B \in W \Rightarrow A + B \notin W$.

$\therefore$ W என்பது V-ன் உள்வெளி அல்ல.

9. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, -1, 1)$, $x_3 = (3, 1, 4)$, $x_4 = (2, 3, 4)$ எனின் $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ என்ற கணத்திலிருந்து V_3 (R) என்ற வெக்டர் வெளிக்கு ஓர் அடிப்படை காண்க.

$$x_1 + x_2 = (1, 2, 3) + (2, -1, 1) = (3, 1, 4) = x_3$$

(அ-து) $x_1 + x_2 - x_3 = 0.$

எனவே, $\{x_1, x_2, x_3\}$ ஒருபடிச் சார்பற்றது அல்ல.

$ax_1 + bx_2 + cx_4 = o$, $a, b, c \in R$ என்க.

பின், $a\,(1, 2, 3) + b\,(2, -1, 1) + c\,(2, 3, 4) = 0$

$$(a + 2b + 2c, 2a - b + 3c, 3a + b + 4c) = (0, 0, 0)$$

(அ-து) $a + 2b + 2c = 0$

$$2a - b + 3c = 0$$

$$3a + b + 4c = 0$$

இவற்றை விடுவிப்பின், $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

எனவே, $ax_1 + bx_2 + cx_4 = 0$

$$\Rightarrow a = 0, \ b = 0, \ c = 0$$

$\therefore$ $\{ x_1, x_2, x_4 \}$ என்ற கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றது.

$A = \{ x_1, x_2, x_4 \}$ என்க.

$\therefore$ $x = lx_1 + mx_2 + nx_4$, $x \in V$, l, m, n திசையிலிகள்

$$= l\,(1, 2, 3) + m\,(2, -1, 1) + n\,(2, 3, 4)$$

மீண்டும், V-ல் உள்ள வெக்டர் (K_1, K_2, K_3) வடிவில் இருக்கும்.

$$\therefore (K_1, K_2, K_3) = l\,(1, 2, 3) + m\,(2, -1, 1) + n\,(2, 3, 4)$$

$$= (l+2m+2n, \ 2l-m+3n, \ 3l+m+4n)$$

$$\therefore \ l+2m+2n = K_1 \quad —(1)$$

$$2l-m+3n = K_2 \quad —(2)$$

$$3l+m+4n = K_3 \quad —(3)$$

$(2) \times 2 + (1) \Rightarrow 5l + 8n = 2K_2 + K_1$

$(2) + (3) \Rightarrow 5l + 7n = K_2 + K_3$

$$\therefore \ n = K_2 + K_1 - K_3.$$

$5l + 7n = (K_2 + K_3)$-ல் $n = K_2 + K_1 - K_3$ எனப் பிரதியிட

$$5l + 7K_2 + 7K_1 - 7K_3 = K_2 + K_3$$

$$5l = -7K_1 - 6K_2 + 8K_3$$

அல்லது, $l = \dfrac{-7K_1 - 6K_2 + 8K_3}{5}$

$(1) \Rightarrow l + 2m + 2n = K_1$

(அ-து) $\dfrac{-7K_1 - 6K_2 + 8K_3}{5} + 2(K_2 + K_1 - K_3) + 2m = K_1$

$\therefore\ -7K_1 - 6K_2 + 8K_3 + 10K_2 + 10K_1 - 10K_3 + 10m = 5K_1$

$\therefore\ 10m = 2K_1 - 4K_2 + 2K_3$

$\therefore\ m = \dfrac{K_1 - 2K_2 + K_3}{5}$

(அ-து) $l = \dfrac{-7K_1 - 6K_2 + 8K_3}{5},\ m = \dfrac{K_1 - 2K_2 + K_3}{5},$

$n = K_1 + K_2 - K_3.$

எனவே, $x = (K_1, K_2, K_3)$ என்ற வெக்டர்

$(K_1, K_2, K_3) = l(1, 2, 3) + m(2, -1, 1) + n(2, 3, 4)$
என்ற முறையில் விளக்கப்படும்.

எனவே, $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டரும் A-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

$\therefore$ $\{x_1, x_2, x_4\}$ எனும் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம் $V_3(R)$-ஐப் பிறப்பிக்கும்.

(அ-து) $\{x_1, x_2, x_3\}$ என்பது $V_3(R)$-ன் அடிப்படைக் கணமாகும்.

பயிற்சி 4–1

1. $(1, 2, 1)$, $(0, +1, -2)$, $(1, -1, 1)$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிரூபி.

2. $(1, 0 - 1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, 0)$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிறுவுக.

3. $V_3(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியிலுள்ள $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ என்ற கணத்தின் ஒருபடிச் சார்பற்ற உட்கணத்தை S_1 (என்க), $L(S_1) = L(S)$ என்றவாறு காண்க.

$x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (-3, -6, 3)$, $x_3 = (2, 1, 3)$,
$x_4 = (8, 7, 7)$ எனக் கொள்க.

விடை : $S_1 = \{1, 2, -1), (2, 1, 3)\}$.

4. V_3 (F) என்ற வெக்டர் வெளியின் அடிப்படைக் கணம் $\{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$ என நிறுவுக.

5. $S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ என்ற கணம் $V_3(R)$-ஐப் பிறப்பிக்கும் எனக் காண்பி.

6. R களத்தில் வரிசைப்பட்ட சிக்கலெண் சோடிகளைக் கொண்ட வெக்டர் வெளி V-ன் அடிப்படைக் கணம் $\{(1, 0), (0, 1), (i, 0), 0, i)\}$ என நிறுவுக.

7. $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ என்பது $R_3(R)$-ன் நீள்பரப்பி, ஆனால் அடிப்படைக் கணம் அல்ல என நிறுவுக.

8. $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, a_i \in R$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி V எனின் முழு எண் கெழுக்களைக் கொண்ட அனைத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளது கணமான W, V-ன் உள்வெளி அல்ல என நிரூபி.

9. அனைத்து 2×3 அணிகளைக் கொண்ட வெக்டர் வெளி $V(F)$ எனின்,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

என்ற கணம் $V(F)$-ன் அடிப்படை எனக் காண்பி.

10. $V(F)$ வெக்டர் வெளியில் x, y, z என்பவை ஒருபடிச் சார்பற்ற வெக்டர்கள் எனின்,

(a) $x + y,\ y + z,\ z + x$
(b) $x + y,\ x - y,\ x - 2y + z$

என்பவையும் ஒருபடிச் சார்பற்ற வெக்டர்கள் என நிரூபி.

11. $(1, -3, 2), (2, -1, 1)$, என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாக $(1, 7, -4)$ என்ற வெக்டரை விவரி.

12. $(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)$ வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாக $(2, -5, 3)$ வெக்டரை விரித்தெழுதுக.

5. ஒருபடி நிலைமாற்றம்

(Linear Transformation)

5-1. ஒருபடி நிலைமாற்றம் — வரையறை

$U(F)$, $V(F)$ இருவெக்டர் வெளிகள் எனின்,

$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$, $x \in U$; $y \in V$; $a, b \in F$ என்ற உருவமாற்றம் $T: U \rightarrow V$ **ஒருபடி நிலைமாற்றம்** (Linear Transformation) எனப்படும்.

மாதிரி-1

U, V என்பன F களத்தின் மீதமைந்த இருவெக்டர் வெளிகள், $T: U \rightarrow V$ எனின்,

(i) $T(o) = o$

(ii) $T(-x) = -T(x)$

(iii) $T(x-y) = T(x) - T(y)$, $\forall\, x, y \in U$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i) T (o) = o

$T(x) = y$, $x \in U$, $y \in V$ என்க.

$$\therefore\ T(x) = T(x + o)$$
$$= T(x) + T(o)$$

$y + o = T(x) + T(o)$, (V-ன் கூட்டு சர்வசம மூலகம் o)

$\therefore\ o = T(o)$ (நீக்கல் விதிப்படி)

(ii) T (−x) = −T (x)

$$T(-x) = T[(-1)(x)]$$
$$= -1\,T(x) \qquad (\because\ T \text{ ஒருபடி நிலைமாற்றம்})$$
$$= -T(x)$$

(iii) $T(x-y) = T(x) - T(y)$

$$\begin{aligned} T(x-y) &= T[x+(-y)] \\ &= T(x) + T(-y) \quad (\because T \text{ ஒருபடி நிலைமாற்றம்}) \\ &= T(x) + [-T(y)] \quad (\text{(ii)-ன் படி}) \\ &= T(x) - T(y). \end{aligned}$$

5-2. ஒருபடிச் செயலி (Linear Operator) — **வரையறை**

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில்,

$$T(ax+by) = a\,T(x) + b\,T(y)$$
$$x \in V,\ y \in V,\ a, b \in F$$

என்ற உருவமாற்றம் $T : V \to V$ ஒருபடிச் செயலி (Linear Operator) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $T(a, b) = (a+b, a)$, $a, b \in R$ எனின், $T: V_2(R) \to V_2(R)$ என்ற உருவமாற்றம் ஒருபடிச் செயலி (Linear Operator) என நிறுவுக.

(a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in V_2(R)$, $l, m \in R$ எனின்,

$$\begin{aligned} T[\,l(a_1, b_1) + m(a_2, b_2)\,] &= T[\,(la_1, lb_1) + (ma_2, mb_2)\,] \\ &= T[\,la_1 + ma_2,\ lb_1 + mb_2\,] \\ &= [\,(la_1 + ma_2) + (lb_1 + mb_2)\ ,\ (la_1 + ma_2)\,] \\ &= [\,l(a_1 + b_1) + m(a_2 + b_2)\ ,\ (la_1 + ma_2)\,] \\ &= [\,l(a_1 + b_1), la_1\,] + [\,m(a_2 + b_2), ma_2\,] \\ &= l(a_1 + b_1, a_1) + m(a_2 + b_2, a_2) \\ &= l\,T(a_1, b_1) + m\,T(a_2, b_2) \end{aligned}$$

$$\therefore\ T[\,l(a_1, b_1) + m(a_2, b_2)\,] = l\,T(a_1, b_1) + m\,T(a_2, b_2).$$

எனவே, T ஒருபடிச் செயலி ஆகும்.

2. $V(R)$ ஒரு வெக்டர் வெளி எனவும் T என்ற உருவமாற்றம், $T(a-ib) = a+ib$, $\forall (a-ib) \in V(R)$; $a, b \in R$ எனவும் கொண்டு, T ஓர் ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுக.

$x = a-ib$, $y = c-id \in V(R)$, $l, m \in R$ என்க.

$\therefore\ lx + my \in V(R)$.

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad T(lx+my) &= T\,[\,l(a-ib)+m(c-id)\,] \\
&= T\,[\,(la+mc)-i(lb+md)\,] \\
&= [\,(la+mc)+i(lb+md)\,] \\
&= [\,l(a+ib)+m(c+id)\,] \\
&= l\,T(a-ib)+m\,T(c-id) \\
&= l\,T(x)+m\,T(y)
\end{aligned}
$$

(அ-து) $T(lx+my) = l\,T(x)+m\,T(y)$.

எனவே, T ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

5-3. சர்வசம செயலி (identity Operator) — வரையறை

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில், $T(x) = x,\ x \in V,$ என்ற உருவமாற்றம் $T: V \to V$ சர்வசம உருவமாற்றம் அல்லது சர்வசம செயலி எனப்படும். இது I என குறியீடு செய்யப்படும்.

சர்வசம உருவமாற்றம் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

$\because\ x, y \in V,\ a, b \in F$ எனின், $ax+by \in V$.

மேலும், $I(ax+by) = ax+by$
$= a\,I(x)+b\,I(y)$.

(அ-து) $I(ax+by) = a\,I(x)+b\,I(y)$.

5-4. பூச்சிய செயலி (zero operator) — வரையறை

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில், $T(x) = o,\ \forall\ x \in V$ என்ற உருவமாற்றம் $T: V \to V$ பூச்சிய உருவமாற்றம் (அல்லது) பூச்சிய செயலி எனப்படும். இது $\hat{o}$ என குறியீடு செய்யப்படும்.

பூச்சிய உருவமாற்றம் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

$\because\ x, y \in V,\ a, b \in F$ எனின், $ax+by \in V$.

$$
\begin{aligned}
\hat{o}(ax+by) &= o \quad \text{(வரையறை)} \\
&= a\,o+b\,o \\
&= a\,\hat{o}(x)+b\,\hat{o}(y).
\end{aligned}
$$

(அ-து) $\hat{o}(ax+by) = a\,\hat{o}(x)+b\,\hat{o}(y)$.

5-5. ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் கூட்டல் — வரையறை

$U(F)$, $V(F)$ இருவெக்டர் வெளிகள் என்க. பின் $T_1: U \to V,\ T_2: U \to V$ இரு ஒருபடி நிலைமாற்றங்களெனின், அவற்றின் கூட்டல்,

$$(T_1+T_2)(x) = T_1(x)+T_2(x),\ \forall\ x \in U$$

என்று வரையறுக்கப்படும்.

ஒருபடி நிலை மாற்றங்களின் கூட்டலும் ஒருபடி நிலைமாற்றமும்.

$\because \quad x, y \in U; \ a, b \in F$ எனின், $ax + by \in U$.

$\therefore \quad (T_1 + T_2)\ (ax + by)$

$= T_1 (ax + by) + T_2 (ax + by)$ (வரையறை)

$= a\ T_1 (x) + b\ T_1 (y) + a\ T_2 (x) + b\ T_2 (y)$

$= a\,[\,T_1 (x) + T_2 (x)\,] + b\,[\,T_1 (y) + T_2 (y)\,]$

$= a\,(T_1 + T_2)(x) + b\,(T_1 + T_2)(y)$

எனவே, வரையறையின்படி, $T_1 + T_2$ ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

5-6. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் திசையிலி பெருக்கம்—வரையறை (Scalar multiplication of linear tarnsformation)

$U(F)$, $V(F)$ வெக்டர் வெளிகள், $a \in F$ ஒரு திசையிலி என்க. $T: U \to V$ எனின், $a\,T$ என்ற உருவமாற்றம்,

$(aT)(x) = a\,[T(x)]\ ,\ \forall\ x \in U$

என வரையறுக்கப்படும்.

T ஒருபடி நிலைமாற்றமெனின், aT-ம் நேர்நிலைமாற்றமாகும்

$\because \quad x, y \in U; \ b, c \in F$ எனின், $bx + cy \in U$

$\therefore \quad (aT)\ [bx + cy] = a\,[\,T(bx + cy)\,]$

$= a\,[\,bT(x) + cT(y)\,]$

$= ba\ T(x) + ca\ T(y)$

$= b\,(aT)(x) + c\,(aT)(y)$

எனவே, (aT) ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

5-7. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் கூட்டு நேர்மாறு மூலகம் (Additive inverse of linear transformation)

$(-T)\ (x) = -\,[\,T(x)\,].,\ \ \forall\ x \in U$

என்ற உருவமாற்றம் $(-T)$, ஒருபடி நிலைமாற்றம் T-யின் கூட்டு நேர்மாறு மூலகம் எனப்படும்.

$(-T)$ ஓர் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

$\because \quad x, y \in U; \ a, b \in F$ எனின், $ax + by \in U$.

$\therefore \quad (-T)\ (ax + by) = -\,[\,T(ax + by)\,]$

$= -\,[\,a\,T(x) + b\,T(y)\,]$

$= a\,[-T(x)] + b\,[-T(y)]$

$= a\,(-T)\ x + b\,(-T)\,y$

(அ-து) $\quad (-T)\ (ax + by) = a\,(-T)\,(x) + b\,(-T)\,(y)$

$\therefore \quad -T$ ஒருபடி நிலை மாற்றமாகும்.

5–8. ஒற்றுருவு (Isomorphism)

$U(F)$, $V(F)$ என்பவை F களத்தில் இரு வெக்டர் வெளிகள் என்க. பின்,

$$T : U \rightarrow V$$

என்ற U வெளியை V வெளிக்கு மேல் செய்யும் ஒன்றுக்கொன்றான நேர் நிலைமாற்றத்தை ஒற்றுருவு மாற்றம் என்கிறோம். இது $U(F) \simeq V(F)$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) (1) T ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றம்

(2) T நேர் நிலைமாற்றம்

என்ற விதிகளுக்குட்பட்ட $T : U \rightarrow V$ என்ற உருமாற்றம் ஒற்றுருவு மாற்றம் எனப்படும்.

5–9. தேற்றம்

ஒவ்வொரு n பரிமாண வெக்டர்வெளி V (F)-ம், $V_n(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் ஒற்றுருவாகும்.

நிரூபணம்

$V(F)$ என்ற n பரிமாண வெக்டர் வெளியின் அடிப்படைக் கணம்

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்க.

$\therefore$ $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டரும்,

$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, $a_i \in F \ \forall i$

என்ற ஒரே முறையில் விளக்கப்படும்.

மேலும், $V_n(F)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ என்ற வடிவிலுள்ள n-வெக்டராகும்.

இப்பொழுது நாம் T என்ற ஓர் உருமாற்றத்தை

$$T : V(F) \rightarrow V_n(F)$$

(அ-து) $T(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

என்று வரையறுப்போம்.

இனி T ஒற்றுருவு மாற்றம் என நிரூபிப்போம்.

1. (i) ஒன்றுக்கொன்றானது

$T(x) = T(y)$, $y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n$ என்க.

$\therefore \quad T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)$
$= T(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)$

$\therefore \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

(அ-து) $a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n,$

$\therefore \; a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n,$

(அ-து) $x = y$

எனவே, T ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம்.

(ii) T மேல்மாற்றம்

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_n(F)$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும், $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ என்ற ஒரு வெக்டர்

$T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

என்றவாறு உள்ளது.

$\therefore$ T ஒரு மேல் மாற்றமாகும்.

(அ-து) T ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றமாகும்.

2. T ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n, \; b_i \in V$ என்க.

$\therefore \quad T(ax + by) = T[a(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)$
$+ b(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)]$

$= T[(aa_1 + bb_1) x_1 + (aa_2 + bb_2) x_2 + \dots + (aa_n + bb_n) x_n]$

$= (aa_1, aa_2, \dots, aa_n) + (bb_1, bb_2, \dots, bb_n)$

$= a(a_1, a_2, \dots, a_n) + b(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$= a\,T(x) + b\,T(y)$

$\therefore$ T ஒரு படி நிலைமாற்றமாகும்.

அதாவது, T ஒன்றுக்கொன்றான மேல் ஒருபடி நிலைமாற்றமாம்

$\therefore \quad V(F) \simeq V_n(F).$

5-10. தேற்றம்

F களத்தில் அமைந்த இரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளிகள் U (F), V (F) என்க. பின்,

$U(F) \simeq V(F) \Rightarrow$ பரிமாணம் U = பரிமாணம் V.

நிரூபணம்

$U(F) \simeq V(F)$ என்க.

நாம் பரிமாணம் U = பரிமாணம் V என நிறுவுவோம்.

பரிமாணம் $U = m$ என்க.

வெக்டர் வெளி U-ன் அடிப்படைக் கணம்,

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ என்போம்.

$U(F) \simeq V(F)$ ஆதலின், $T: U \rightarrow V$ என்ற ஒற்றுருவு மாற்றம் உண்டு. இனி,

$S = \{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)\}, \; \forall \; T(x_i) \in V$

என்பது V-ன் அடிப்படைக் கணம் என நிறுவுவோம்.

$a_1, a_2, \ldots, a_m \in F$ என்ற திசையிலிகள்

$a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) + \ldots + a_m T(x_m) = 0$

என்றவாறு உள்ளது என்க.

$\therefore \; T[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m] = T(o)$

$\therefore \; a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = o$

$(\because \; T$ ஒன்றுக்கொன்றானது, $T(\alpha) = T(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta)$

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது ஓர் அடிப்படை கணம் ஆதலின்,

$a_1 = o, \; a_2 = o, \; \ldots, a_m = o$

எனவே, $\{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)\}$ ஒரு படிச் சார்பற்றதாகும்.

மேலும், T ஒரு மேல் உருமாற்றம் (onto mapping). ஆகவே, $y \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும், $T(x) = y$ என்றவாறு $x \in U$ என்ற ஒரு வெக்டர் உண்டு.

மீண்டும்,

$x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m, \; b_i \in F \;$ ($\because$ U-ன் அடிப்படை B)

எனவே, $T(x) = y$

$T(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m) = y$

(அ-து) $b_1 T(x_1) + b_2 T(x_2) + \ldots + b_m T(x_m) = y$

எனவே, V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் கணம் S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடி சேர்மானமாகும்.

$\therefore \; L(S) = V.$

$\therefore \; S = \{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_m)\}$

எனும் கணம் வெக்டர் வெளி V-ன் அடிப்படையாகும்.

$\therefore$ V-ன் பரிமாணம் m ஆகும்.
எனவே, பரிமாணம் U = பரிமாணம் V.

அடுத்து, பரிமாணம் U = பரிமாணம் V என்க. இனி நாம் $U(F) \simeq V(F)$ என நிறுவுவோம்.

$$B_1 = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_m \}$$
$$B_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m \}$$

என்பவை முறையே U, V என்ற வெக்டர் வெளிகளது அடிப்படைகள் என்க.

$x \in U, \quad c_1, c_2, \ldots, c_m \in F$ எனின்,

$x = c_1 x_1, + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m$ ($\because$ U-ன் அடிப்படை B_1)

$T(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_m y_m$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட $T: U \to V$ என்ற உருமாற்றத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$T(x_i) = y_i$ என்றவாறு உருமாற்றம் T உளது என்பது தெளிவு.

1. (i) T ஒன்றுக்கொன்றுனது

$x, y \in U$ எனின்,

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i, \; y = \sum_{i=1}^{m} c_i' x_i, \; (c_i, c_i' \in F)$$

$$T(x) = T(y) \Rightarrow (T \sum_1^m c_i x_i) = T(\sum_1^m c_i' x_i)$$

$$\Rightarrow \sum_1^m T(c_i x_i) = \sum_1^m T(c_i' x_i)$$

$$\Rightarrow \sum_1^m c_i [T(x_i)] = \sum_1^m c_i' [T(x_i)]$$

$$\Rightarrow \sum_1^m (c_i - c_i') y_i \quad [\because \; T(x_i) = y_i, \; \forall i]$$

$\Rightarrow c_i - c_i' = o \;\; \forall i$ ($\because$ $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம்)

$$\Rightarrow \Sigma \; c_i x_i = \Sigma \; c_i' x_i$$
$$\Rightarrow x = y.$$

$\therefore$ T ஒன்றுக் கொன்றுனதாகும்.

(ii) T ஒரு மேல் உருமாற்றம்

V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் $\Sigma\, d_i\, y_i$ என்று விளக்கப்படக் கூடும். இது U-ல் உள்ள $\Sigma\, d_i\, x_i$ என்ற மூலகத்தின் T-விம்பமாகும். எனவே, T ஒரு மேல் உருமாற்றமாகும்.

2. T ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$\therefore\; x, z \in U$ எனின்,

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m \\ z &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots, + b_m x_m \end{aligned}\right\} \quad a_i, b_i \in F$$

$$\begin{aligned} \therefore\; & T(ax + bz) \\ &= T\left[a\,(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m) + b\,(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_m x_m)\right] \\ &= T\left[\,\Sigma\,(aa_i + b\, b_i)\, x_i\right], \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &= \Sigma\,(a\, a_i + b\, b_i)\, y_i \\ &= \Sigma\, a\, a_i\, y_i + \Sigma\, b\, b_i\, y_i \\ &= a\, \Sigma\, a_i\, y_i + b\, \Sigma\, b_i\, y_i \\ &= a\, T(x) + b\, T(z) \end{aligned}$$

$\therefore$ T ஒருபடி நிலைமாற்றம்.

எனவே, T உருமாற்றம் U வெளியை V வெளிக்கு மேல் செய்யும் ஒன்றுக்கொன்றான நேர் நிலைமாற்றமாகும்.

$$\therefore\; U(F) \simeq V(F).$$

5-11. தேற்றம்

F களத்தில் அமைந்த V என்ற வெக்டர் வெளியின் நிரப்பு வெளிகள் W_1, W_2 என்க. (அ-து.) $V = W_1 \oplus W_2$. பின், $y \in W_2$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $y + W_1$ என்ற இணைக்கணத்தைத் அளிக்கும் T எனும் உருமாற்றம்; W_2, $\dfrac{V}{W_1}$ இவைகளுக்கிடையே அமைந்த ஒற்றுருவு மாற்றமாகும்.

நிருபணம்

$$T : W_2 \to \frac{V}{W_1} : T(y) = y + W_1,\; y \in W_2 \qquad \text{—(1)}$$

$$V = W_1 \oplus W_2 \qquad \text{—(2)}$$

என்பது கொள்கை.

T ஓர் ஒற்றுருவு மாற்றம் என நிறுவவேண்டும்.

1. (i) T ஒன்றுக் கொன்றுனது

$T(y_1) = T(y_2)$, $y_1, y_2 \in W_2$ என்க.

$\therefore \; y_1 + W_1 = y_2 + W_1$ —(1)-ன்படி,

$$\begin{aligned}
&\therefore \; y_1 - y_2 \in W_1 \\
&\Rightarrow y_1 - y_2 \in W_1 \cap W_2 \quad (\because y_1 - y_2 \in W_2) \\
&\Rightarrow y_1 - y_2 = O \quad (\because W_1, W_2 \text{ நிரப்பு உள்வெளிகள்}) \\
&\Rightarrow y_1 = y_2
\end{aligned}$$

$\therefore$ T ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம்.

(ii) T மேல் உருமாற்றம்

$$z + W_1 \in \frac{V}{W_1}, \; z \in V \text{ என்க.}$$

$$\begin{aligned}
\therefore z + W_1 &= x + y + W_1 \quad (\because z \in v \Rightarrow z = x + y, \; x \in W_1, y \in W_2) \\
&= (x + W_1) + (y + W_1) \quad (\because \text{இணைக்கணத்தின் பண்பு}) \\
&= W_1 + (y + W_1) \quad (\because x \in W_1) \\
&= y + W_1 \\
&= T(y)
\end{aligned}$$

$\therefore$ $z + W_1 \in \dfrac{V}{W_1}$ என்ற ஒவ்வொன்றிற்கும், $y \in W_2$ என்பது $T(y) = y + W_1 = z + W_1$ என்றவாறு இருக்கிறது.

எனவே, T மேல் உருமாற்றமாகும்.

2. T நேர் நிலைமாற்றம்

$y_1, y_2 \in W_2$, $a, b \in F$ எனின், $ay_1 + by_2 \in W_2$

$$\begin{aligned}
\therefore \; T(ay_1 + by_2) &= ay_1 + by_2 + W_1 \quad (\because (1)\text{-ன்படி}) \\
&= (ay_1 + W_1) + (by_2 + W_1) \quad (\because \text{இணைக் கணத்தின் பண்பு}) \\
&= a(y_1 + W_1) + b(y_2 + W_1) \quad (\because \text{இணைக் கணத்தின் பண்பு}) \\
&= aT(y_1) + bT(y_2)
\end{aligned}$$

$\therefore$ T ஓர் ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

எனவே, T ஒற்றுருவு மாற்றமாகும்.

5-12. ஒருபடி நிலைமாற்றங்களது பெருக்கம் (Product of linear transformations)

$U(F)$, $V(F)$, $W(F)$ என்பவை மூன்று வெக்டர் வெளிகள் என்க. பின்,

$$T_1 : U \to V$$
$$T_2 : V \to W$$

என்பவை, இரு ஒருபடி நிலை மாற்றங்களெனின்,

$$(T_1 T_2)(x) = T_1 [T_2(x)], \quad \forall\, x \in U$$

என்ற விதிக்குட்பட்ட $(T_1 T_2)$ என்ற $U \to W$ உருவமாற்றம் T_1, T_2 என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றங்களது பெருக்கம் எனப்படும்.

$(T_1 T_2)$ என்பது ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

$\because$ $x, y \in U$; $a, b \in F$ எனின், $ax + by \in U$.

பின், $(T_1 T_2)(ax + by) = T_1 [T_2(ax + by)]$
$= T_1 [aT_2(x) + bT_2(y)]$
$= aT_1 [T_2(x)] + bT_1 [T_2(y)]$
$= a(T_1 T_2)(x) + b(T_1 T_2)(y)$

(அ-து) $(T_1 T_2)(ax + by) = a(T_1 T_2)x + b(T_1 T_2)y$

$\therefore$ $(T_1 T_2)$ ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

5-13. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் பண்புகள்

$V(F)$ ஒரு வெக்டர்வெளி; T_1, T_2, T_3 என்பவை V-ல் ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் (நேர் நிலைமாற்றங்கள்) எனின்,

(1) $T_1 \hat{0} = \hat{0}\, T_1 = \hat{0}$

(2) $I T_1 = T_1 I = T_1$

(3) $(T_1 + T_2) T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3$

(4) $T_1 (T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_1 T_3$

(5) $T_1 (T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$

(6) $a(T_1 T_2) = (aT_1) T_2 = T_1 (aT_2)$, a ஒரு திசையிலி. [$\hat{0}$, I என்பவை V-ன் மீதமைந்த (*on V*) பூச்சிய, சர்வசம செயலிகளாகும்.]

நிருபணம்

(1) $\mathbf{T_1} \hat{0} = \hat{0}\, \mathbf{T_1} = \hat{0}$

$x \in V$ என்க. பின்,

$$(T_1 \hat{O})\,x = T_1 [\hat{O}(x)] \quad \text{(பெருக்கல் வரையறை)}$$
$$= T_1 (o) \quad (\hat{O}\text{-ன் வரையறை})$$
$$= O$$
$$= \hat{O}(x)$$
$$\therefore \quad T_1 \hat{O} = \hat{O}$$

மீண்டும்,

$$(\hat{O}\, T_1)\,x = \hat{O}\,[T_1(x)]$$
$$= \hat{O}\,(\alpha), \quad \alpha = T_1(x) \in V$$
$$= O$$
$$= \hat{O}\,(x)$$
$$\therefore \quad \hat{O}\, T_1 = \hat{O}$$

எனவே, $T_1 \hat{O} = \hat{O}\, T_1 = \hat{O}$

(2) $\mathbf{I\, T_1 = T_1 I = T_1}$

$$I\, T_1 (x) = I\,[T_1 (x)] \quad (\because I\text{-ன் வரையறை}$$
$$= T_1 (x).$$

மீண்டும், $T_1 I (x) = T_1 [I (x)]$

$$= T_1 (x), \quad [\because I\text{-ன் வரையறை}]$$
$$\therefore \quad I\, T_1 = T_1 I = T_1$$

(3) $\mathbf{(T_1 + T_2)\, T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3}$ **(வலது பங்கீட்டு விதி)**

$$[(T_1 + T_2)\, T_3]\,(x) = (T_1 + T_2)\,[T_3 (x)], \quad \forall\, x \in V$$
$$= T_1 [T_3 (x)] + T_2 [T_3 (x)]$$
$$= (T_1 T_3)(x) + (T_2 T_3)(x)$$
$$= (T_1 T_3 + T_2 T_3)(x)$$
$$\therefore \quad (T_1 + T_2)\, T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3.$$

(4) $\mathbf{T_1 (T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_1 T_3}$ **(இடது பங்கீட்டு விதி)**

$$[T_1 (T_2 + T_3)]\,(x) = T_1 [(T_2 + T_3)\,x]$$
$$= T_1 [T_2 (x) + T_3 (x)]$$
$$= (T_1 T_2)(x) + (T_1 T_3)(x)$$
$$= (T_1 T_2 + T_1 T_3)(x)$$
$$\therefore \quad T_1 (T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_1 T_3.$$

(5) $\mathbf{T_1 (T_2 T_3) = (T_1 T_2)\, T_3}$ **(சேர்ப்பு விதி)**

$$[T_1 (T_2 T_3)]\,x = T_1 [(T_2 T_3)\,x]$$
$$= T_1 [T_2 (T_3 (x))]$$
$$= [(T_1 T_2)\, T_3 (x)]$$
$$= [(T_1 T_2)\, T_3]\, x$$
$$\therefore \quad T_1 (T_2 T_3) = (T_1 T_2)\, T_3.$$

(6) $a(T_1 T_2) = (aT_1) T_2 = T_1 (aT_2)$

$$\begin{aligned}[a(T_1 T_2)]x &= aT_1[T_2(x)] \\ &= [(aT_1) T_2(x)] \\ &= [(aT_1) T_2]x \\ \therefore\ a(T_1 T_2) &= (aT_1) T_2\end{aligned}$$

மீண்டும்,

$$\begin{aligned}[T_1(aT_2)]x &= T_1[(aT_2)x] \\ &= T_1(aT_2(x)) \\ &= aT_1[T_2(x)] \\ &= a[(T_1 T_2)x] \\ &= a(T_1 T_2)x \\ \therefore\ T_1(aT_2) &= a(T_1 T_2)\end{aligned}$$

எனவே,

$$a(T_1 T_2) = (aT_1) T_2 = T_1 (aT_2).$$

5-14. T-ல் பல்லுறுப்புக் கோவை

$T : V \to V$ எனின், TT-ம் ஒருபடி நிலைமாற்றமாம். $T = T^1$, $TT = T^2$ என எழுதலாம். மேலும் ஒருபடி நிலைமாற்றங்களின் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டவையாதலின் $T^n = T.T.T \ldots$ n தடவைகள் என வரையறுக்கலாம். ஆதலின், T^n-ம் ஒரு படி நிலை மாற்றமேயாகும். (n ஒரு கூட்டு முழு எண்). மேலும், $T^0 = I$ (சர்வசம ஒருபடி நிலைமாற்றம்).

$T^m T^n = T^{m+n}$

$(T^m)^n = T^{mn}$

5-15. தேற்றம்

U (F), V (F) என்பவை F களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளிகள் என்க. U-லிருந்து V-க்கு அமையும் அனைத்து ஒருபடி நிலைமாற்றங்களும் கொண்ட கணம் L (U, V)

$(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x), \ \forall\, x \in U;\ T_1, T_2 \in L$

$(a\,T_1)x = a\,T_1(x), \ \forall\, x \in U;\ T_1 \in L,\ a \in F$

என்ற விதிகளுக்குட்பட்ட, F களத்தில் அமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

நிரூபணம்

L (*U, V*) என்ற கணம் வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளுக்கும் பொருந்துமெனின், அது ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

1. L (U, V) ஒரு கூட்டு பரிமாற்று குலம்

(1) $x, y \in U;\ a, b \in F$ எனின், $ax + by \in U$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad (T_1 + T_2)(ax + by) &= T_1(ax + by) + T_2(ax + by) \\ &= aT_1(x) + bT_1(y) + aT_2(x) + bT_2(y) \\ &= a[T_1(x) + T_2(x)] + b[T_1(y) + T_2(y)] \\ &= a(T_1 + T_2)x + b(T_1 + T_2)y \end{aligned}$$

(அ-து) இரு ஒருபடி நிலை மாற்றங்களது கூட்டலும் ஒருபடி நிலைமாற்றமேயாகும்.

(2) $$\begin{aligned} (T_1 + T_2)x &= T_1(x) + T_2(x) \\ &= T_2(x) + T_1(x) \\ &= (T_2 + T_1)x \end{aligned}$$

எனவே, பரிமாற்று விதி பொருந்தும்.

(3) $T_1, T_2, T_3, \in L$ எனின்,

$$\begin{aligned} [(T_1 + T_2) + T_3]x &= (T_1 + T_2)x + T_3(x) \\ &= T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) \\ &= T_1(x) + [T_2(x) + T_3(x)] \\ &= T_1(x) + [(T_2 + T_3)x] \\ &= [T_1 + (T_2 + T_3)]x \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$$

(4) $L(U, V)$-ன் சர்வசம மூலகம் பூச்சிய நிலைமாற்றம்.

$$\begin{aligned} \because \quad (T + \hat{O})x &= T(x) + \hat{O}(x) \\ &= T(x) + O \\ &= T(x) \end{aligned}$$

(அ-து) $T + \hat{O} = T$

இவ்வாறே $\hat{O} + T = T$

(5) $T_1 \in L$ என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்துக்கும் $-T_1, \in L$ என்ற மூலகம்

$$\begin{aligned} [T_1 + (-T_1)](x) &= T_1(x) + (-T_1)(x) \\ &= T_1(x) - T_1(x) \\ &= O \\ &= \hat{O}(x) \end{aligned}$$

(அ-து) $T_1 + (-T_1) = \hat{O}$

இவ்வாறே, $(-T_1) + T_1 = \hat{O}$

எனவே, $-T_1$ என்பது T_1-ன் நேர்மாறு மூலகம் ஆகும்.

$\therefore$ $L(U, V)$ ஒரு கூட்டு பரிமாற்று குலம்.

2. திசையிலி பெருக்கல் விதிகள்

(1) $x, y \in U;\ c, d \in F$; எனின், $cx + dy \in U$

$$\begin{aligned} \therefore\quad (aT_1)(cx + dy) &= a[T_1(cx + dy)] \\ &= a[cT_1(x) + d\,T_1(y)] \\ &= a[cT_1(x)] + a(dT_1(y)) \\ &= (ac)T_1(x) + (ad)T_1(y) \\ &= c[aT_1(x)] + d[aT_1(y)] \\ &= c(aT_1)x + d(aT_1)y \end{aligned}$$

(அ-து) $T_1 \in L,\ a \in F$ எனின், $aT_1 \in L.$

(2) $T_1 \in L;\ a, b \in F$ எனின்,

$$\begin{aligned} [(a + b)T_1]x &= (a + b)T_1(x) \\ &= a\,T_1(x) + b\,T_1(x) \\ &= (a\,T_1)x + (b\,T_1)x \\ &= (aT_1 + bT_1)x \end{aligned}$$

$$\therefore\quad (a + b)T_1 = aT_1 + bT_1$$

(3) $T_1, T_2 \in L,\ a \in F$ எனின்,

$$\begin{aligned} [a(T_1 + T_2)]x &= a[(T_1 + T_2)x] \\ &= a[T_1(x) + T_2(x)] \\ &= a\,T_1(x) + a\,T_2(x) \\ &= (a\,T_1)x + (a\,T_2)x \\ &= (a\,T_1 + a\,T_2)x \end{aligned}$$

(அ-து) $a(T_1 + T_2) = aT_1 + aT_2.$

(4) $T_1 \in L;\ a, b \in F$

$$\begin{aligned} [(ab)T_1)]x &= (ab)T_1(x), \quad \forall x \in U \\ &= a[bT_1(x)] \\ &= a[(bT_1)x] \\ &= [a(bT_1)]x \end{aligned}$$

$$\therefore\quad (ab)T_1 = a(bT_1)$$

(5) $T_1 \in L$ என்ற ஒவ்வொரு ஒருபடி நிலை மாற்றத்திற்கும், $I \in F$ என்பது

$$\begin{aligned} (I\,T_1)x &= I\,[T_1(x)] \\ &= T_1(x) \end{aligned}$$

(அ-து) $I.T_1 = T_1$

ஆகவே, ஒரு வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் $L(U, V)$ என்ற கணத்திற்குப் பொருந்துகிறது.

$\therefore$ $L(U, V)$ ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

மாதிரி–2

F களத்தில் அமைந்த இரு வெக்டர் வெளிகள் U, V என்க. $T_1, T_2 : U \to V$ உருவமாற்றங்கள் ஒருபடி நிலை மாற்றங்கள் என்க. பின் $T : U \to V$ என்ற உருவமாற்றம்

$$T(x) = a\,T_1(x) + T_2(x), \quad a, b \in F$$

என்று வரையறுக்கப்படின், அது ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$T_1 : U \to V, \quad T_2 : U \to V$$

என்பவை ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள்.

$$\therefore \quad T_1(x) \in V, \quad T_2(x) \in V, \quad \forall\, x \in U.$$

$$\therefore \quad T(x) = a\,T_1(x) + T_2(x) \in V, \quad \forall\, x \in U.$$

$\therefore$ T என்பது U-லிருந்து V-க்கு ஓர் உருவமாற்றமாகும்.

இனி, T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுவோம்.

$x, y \in U; \quad c, d \in F \Rightarrow cx + dy \in U.$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad T(cx + dy) &= a\,T_1(cx + dy) + T_2(cx + dy) \\
&= a\,[cT_1(x) + dT_1(y)] + [c\,T_2(x) + d\,T_2(y)] \\
&= ac\,T_1(x) + ad\,T_1(y) + c\,T_2(x) + d\,T_2(y) \\
&= c\,[aT_1(x) + T_2(x)] + d\,[aT_1(y) + T_2(y)] \\
&= cT(x) + d\,T(y)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad T(cx + dy) = CT(x) + d\,T(y)$$

எனவே, T ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

5–16. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் கெர்னல் — வரையறை (Kernel of a Linear Transformation)

$U(F), V(F)$ என்பவை F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளிகள் என்க. பின், $T : U \to V$ எனின், ஒருபடி நிலைமாற்றம் T–ஆல் V–ல் உள்ள பூச்சிய வெக்டராக அமைப்பு மாற்றம் பெறும் U–ல் உள்ள அனைத்து வெக்டர்களது கணம், ஒருபடி நிலை

மாற்றம் T-ன் கெர்னல் (Kernel) எனப்படும். இது ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் பூச்சிய வெளி எனவும் அழைக்கப்படும்.

(அ-து) பூச்சிய வெளி $(T) = N(T)$
$$= \{x \in U, T(x) = O \in V\}$$

5-17. தேற்றம்

$U(F)$, $V(F)$ இரு வெக்டர் வெளிகள் என்க. T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் பூச்சியவெளி K எனின், $U(F)$-ன் உள்வெளி K என்றாகும்.

நிரூபணம்

பூச்சியவெளி $(T) = K = \{x \in U : T(x) = O \in V\}$,
$$O \in K$$

எனவே, $K \subset U$.

$x, y \in U, \quad T(x) = O, \quad T(y) = O$

மேலும், $x, y \in K \Rightarrow x, y \in U, \ ax + by \in U$.

$$\therefore \quad T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$
$$= a.o + b.o \quad (\text{வரையறை})$$
$$= O$$

எனவே, $x, y \in K;\ a, b \in F \Rightarrow ax + by \in K$.

$\therefore$ K என்பது U-ன் ஓர் உள்வெளி.

5-18. வீச்சு (Range) — வரையறை

$U(F)$, $V(F)$ என்பவை F களத்தின் மீது அமைந்த இரு வெக்டர் வெளிகள், $T : U \to V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின் U-ன் விம்பகணம் (Image Set of U), T-ன் வீச்சு எனப்படும்.

இது $R(T)$ அல்லது $T(U)$ என குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) $R(T) = \{y \in V : y = T(x), x \in U\}$

5-19. தேற்றம்

$U(F)$, $V(F)$ இரு வெக்டர் வெளிகள் என்க. T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் வீச்சு $R(T)$ எனின், அது V-ன் ஓர் உள்வெளியாகும்.

நிரூபணம்

$y_1, y_2 \in R(T)$ எனின்,

$T(x_1) = y_1, \quad T(x_2) = y_2, \quad x_1, x_2 \in U$

$$x_1, x_2 \in U \Rightarrow ax_1 + bx_2 \in U, \quad a, b \in F$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad ay_1 + by_2 &= a\,T(x_1) + b\,T(x_2) \\ &= T(ax_1) + T(bx_2) \\ &= T(ax_1 + bx_2), \text{ } (\because T \text{ ஒருபடி நிலைமாற்றம்}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad ay_1 + by_2 \in R(T)$$

எனவே, $R(T)$ என்பது V-ன் ஓர் உள்வெளி.

5-20. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் தரம் – வரையறை (Rank of a linear transformation)

$U(F)$, $V(F)$ என்பவை F களத்தில் அமைந்த இரு வெக்டர் வெளிகள், $T : U \rightarrow V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின் $R(T)$-ன் பரிமாணம் T-ன் தரம் (Rank) எனப்படும். இது $\mu(T)$ என குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) $\mu(T) =$ பரிமாணம் $[R(T)]$.

5-21. ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் பூச்சிய பரிமாணம் (Nullity of a linear transformation)

$U(F)$, $V(F)$ வெக்டர் வெளிகள், $T : U \rightarrow V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின் T-ன் பூச்சிய வெளியினது பரிமாணம் T-ன் பூச்சிய பரிமாணம் எனப்படும். இது $v(T)$ என குறியீடு செய்யப்படும்.

(அ-து) $v(T) =$ பரிமாணம் $[N(T)]$

5-22. ஒருமைசேர், ஒருமையற்ற ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் (Singular, Non-singular linear transformations)

$U(F)$, $V(F)$ என்பவை இரு வெக்டர் வெளிகள் என்க. பின் $T : U \rightarrow V$ என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$$T(x) = O, \quad x \neq O \in U$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின், அது **ஒருமைசேர் ஒருபடி நிலைமாற்றம்** எனப்படும்.

U-ல் உள்ள பூச்சிய வெக்டர் மட்டுமே V-ல் உள்ள பூச்சிய வெக்டராக உருவமாற்றம் பெறக்கூடிய ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒருமையற்ற (Non-Singular) நிலைமாற்றம் எனப்படும்.

5-23. நேர்மாறுள அல்லது நேர்மாறுத் தன்மையுடைய செயலி (Invertible Operator)

R என்ற களத்தின்மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி V என்க. பின் $T : V \rightarrow V$ என்ற அமைப்பு மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்றான

மேல் ஒருநிலை மாற்றமெனின், T நேர்மாறுத் தன்மையுடைய செயலி எனப்படும்.

5-24. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்துள்ள இரு வெக்டர் வெளிகள் U (F), V (F) என்க. U முடிவுள்ள பரிமாணமுடையது, $T : U \to V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின்,

பரிமாணம் U = தரம் (T) + T-ன் பூச்சிய பரிமாணம் என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$U(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் n என்க. $N(T)$ என்ற பூச்சியவெளி, $U(F)$-ன் உள்வெளியாதலின் அதன் பரிமாணம் n-ஐ விட அதிகமில்லாமலிருக்கும்.

(அ-து) பூச்சியவெளி பரிமாணம் K எனின், $k \leq n$.

$$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

என்பது $N(T)$-ன் அடிப்படைக் கணம் எனின், நாம் B_1-ஐ விரிவாக்கி அதை $U(F)$-ன் அடிப்படைக் கணம் எனக் கொள்ளலாம். அது,

$$B_2 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n \}$$

என்க.

இனி $(n-k)$ வெக்டர்களது T விம்பங்களைக் கொண்ட

$$B_3 = \{T(x_{k+1}), T(x_{k+2}), \ldots, T(x_n)\}$$

என்ற கணம், $R(T)$ என்ற T-வீச்சின் அடிப்படைக் கணம் என நிறுவுவோம்.

1. B_3 ஒருபடிச் சார்பற்றது

$$a_{k+1} T(x_{k+1}) + a_{k+2} T(x_{k+2}) + \ldots + a_n T(x_n) = O, \quad a_i \in F$$
$$\Rightarrow T(a_{k+1} x_{k+1}) + T(a_{k+2} x_{k+2}) + \ldots + T(a_n x_n) = O$$
$$\Rightarrow T(a_{k+1} x_{k+1} + a_{k+2} x_{k+2} + \ldots + a_n x_n) = O$$
$$\therefore a_{k+1} x_{k+1} + a_{k+2} x_{k+2} + \ldots + a_n x_n \in N(T).$$

ஆனால், $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது $N(T)$ என்ற வெளியின் அடிப்படைக் கணம்.

ஆகவே, $(a_{k+1} x_{k+1} + a_{k+2} x_{k+2} + \ldots + a_n x_n)$ என்ற வெக்டர் B_1-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக விளக்கலாம்.

$\therefore\ a_{k+1} x_{k+1} + a_{k+2} x_{k+2} + \ldots + a_n x_n = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n$

(அ-து) $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n - a_{k+1} x_{k+1} - a_{k+2} x_{k+2}$
$- \ldots - a_n x_n = O$

(அ-து) B_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்மானம் பூச்சியமாகும்.

B_2 ஒருபடி சார்பற்றதாதலின்,

$b_1 = o,\ b_2 = o, \ldots, b_n = o,\ a_{k+1} = o,\ a_{k+2} = o, \ldots, a_n = o.$

எனவே,

$a_{k+1} T(x_{k+1}) + a_{k+2} T(x_{k+2}) + \ldots + a_n T(x_n) = O$
$\Rightarrow\ a_{k+1} = o,\ a_{k+2} = o, \ldots, a_n = o$

$\therefore$ $(n-k)$ வெக்டர்களைக் கொண்ட B_3 என்ற கணம் ஒருபடி சார்பற்றதாகும்.

2. $L(B_3) = R(T)$: $\because\ B_3 \subseteq U,\ L(B_3) \subseteq R(T)$ —(1)

$y \in R(T)$ எனின்,

வரையறையின்படி $y = T(x),\ x \in U.$

$U(F)$-ன் அடிப்படைக் கணம் B_2.

$\therefore\ x \in U,\ x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k + \ldots + a_n x_n.$

$$\begin{aligned}\therefore\ y &= T(x)\\ &= T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k + \ldots + a_n x_n)\\ &= a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) + \ldots + a_k T(x_k) + \ldots + a_n T(x_n)\\ &= a_1 o + a_2 o + \ldots + a_k o + a_{k+1} T(x_{k+1}) + \ldots + a_n T(x_n)\\ &= a_{k+1} T(x_{k+1}) + \ldots + a_n T(x_n)\end{aligned}$$

$(\because\ T(x_i) = o,\ i = 1, 2, \ldots, K)$

$\therefore\ y = a_{k+1} T(x_{k+1}) + \ldots + a_n T(x_n)$

(அ-து) y வெக்டர், $T(x_{k+1}), T(x_{k+2}), \ldots, T(x_n)$ என்ற மூலகங்களது ஒருபடி சேர்மானமாகும். அதாவது, y வெக்டர் B_3 கணத்திலுள்ள மூலகங்களது ஒருபடி சேர்மானமாகும்.

$\therefore\ R(L) \subseteq L(B_3)$ —(2)

$\therefore\ L(B_3) = R(T).$ $(\because\ (1), (2))$

$\therefore\ B_3$ கணம் $R(T)$-ன் அடிப்படையாகும்.

கணம் B_3-ல் உள்ள மூலகங்களது எண் $(n-k)$ ஆகும். எனவே, $R(T)$-ன் பரிமானம் $(n-k)$

(அ-து) $\mu(T) = n - k.$

$$\therefore \quad \mu(T) + N(T) = (n-k) + K$$
$$= n = u\text{-ன் பரிமாணம்}$$

எனவே,

T-ன் தரம் + T-ன் பூச்சிய பரிமாணம் = u-ன் பரிமாணம்.

5–25. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த n பரிமாண வெக்டர் வெளிகள் U (F) V (F). அவற்றின் அடிப்படைகள் முறையே

$$B_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$
$$B_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \} \quad \text{என்க.}$$

பின்,

$$T(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{—(1)}$$

என்ற முறையில் T : U → V என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒரே முறையில் இருக்கும்.

நிரூபணம்

U_1-ன் அடிப்படை B_1 ஆதலின் $x \in U$ என்ற, எந்த ஒரு வெக்டரும்

$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \; a_i \in F$

என்று விளக்கப்படக் கூடும்.

முதலில், $T(x) = T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)$
$= a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) + \ldots + a_n T(x_n)$
$= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n$, ((1)-ன் படி)
$= \Sigma a_i y_i, \quad a_i \in F, \; \forall x \in U \qquad$ —(2)

என்ற முறையில் வரையறுப்போம்.

இனி T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுவோம்.

V-ன் அடிப்படை B_2 ஆதலின், $\Sigma a_i y_i \in V$

$\therefore$ T என்ற உருமாற்றம் $U \to V$ ஆகும்.

$x_1, x_2, \in U, \quad a, b \in F \Rightarrow a x_1 + b x_2 \in U$
$(x_1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n = \Sigma l_i x_i, \; l_i \in F$
$x_2 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = \Sigma m_i x_i, \; m_i \in F)$

$\therefore \quad T(ax_1 + bx_2) = T[a \Sigma l_i x_i + b \Sigma m_i x_i]$
$= T[\Sigma (a l_i + b m_i) x_i]$
$= \Sigma (a l_i + b m_i) y_i$ (வரையறையிலிருந்து)
$= a \Sigma l_i y_i + b \Sigma m_i y_i$
$= a T(x_1) + b T(x_2)$

எனவே, T ஒருபடி நிலைமாற்றம்.

மீண்டும் (2)-ன் ஒரு வகையாக (particular case)

$$x_i = o.\ x_1 + o \cdot x_2 + \dots + 1.\ x_i + \dots + o.\ x_n \in V, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(அ-து) $T(x_i) = T(x_i) = 1.\ y_i = y_i$, $\quad i = 1, 2, \dots, n.$

எனவே, $T : U \to V$ ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

அடுத்து இந்த ஒருபடி நிலைமாற்றம் T ஒரேமுறை நிலை மாற்றம் என நிறுவுவோம்.

T' என்பது, $T'(x_i) = y_i$ என்ற முறையில் பிறிதொரு நிலை மாற்றம் என்க. பின்,

$$\begin{aligned} T'(X) &= T'(\Sigma\, a_i x_i) \\ &= \Sigma\, a_i\, T'(x_i) \\ &= \Sigma\, a_i y_i \\ &= T(x) \end{aligned}$$

எனவே, $T : U \to V$ தனித்தன்மையுடையது.

5–26. தேற்றம்

$T: U \to V$ என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம், அது ஒருமையற்ற தாயிருந்தால் மட்டுமே ஒற்றுருவாகும்.

நிரூபணம்

T ஓர் ஒற்றுருவு என்க. (அ-து) T ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றம் என்க. இனி T ஒருமையற்றது என நிறுவுவோம்.

T ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாதலின் $O \in U$ என்ற ஒரு வெக்டர் மட்டுமே T மாற்றத்தினால் $O \in V$ என்றாகும். அதாவது, T-ன் பூச்சிய வெளியில் உள்ள ஒரே வெக்டர் O மட்டுமே ஆகும்.

எனவே, T ஒருமையற்றதாகும்.

மறுதலையாக, T ஒருமையற்றது (non-singulár) என்க. இனி, T ஒன்றுக்கொன்றானது எனக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} & T(x_1) = T(x_2) \\ \Rightarrow\ & T(x_1) - T(x_2) = O \in V\ ;\ x_1, x_2 \in U \\ \Rightarrow\ & T(x_1 - x_2) = O \\ \Rightarrow\ & x_1 - x_2 = O \in U \\ \Rightarrow\ & x_1 = x_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ T ஒன்றுக்கொன்றானது.

T ஒருமையற்றது, ஒன்றுக்கொன்ருனது. எனவே, T மேல் உருமாற்றமுமாகும்.

எனவே, T ஒற்றுருவு ஆகும்.

5-27. தேற்றம்

F களத்தின் மீது அமைந்துள்ள வெக்டர் வெளிகள், U (F), V (F) என்க. பின், அவற்றின் பரிமாணங்கள் முறையே m, n எனின், L (U, V) என்ற வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் m n ஆகும்.

நிரூபணம்

$$B_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$
$$B_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

என்பவை முறையே U, V வெக்டர் வெளிகளது அடிப்படைகள் என்க. பின்,

$$T_{ij}(x_k) = \begin{cases} y_j, & i = K, \ i = 1, 2, \ldots, m \\ o, & i \neq K, \ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (1)$$

என்ற முறையில் $T_{ij} \in L(U, V): U \to V$ என்ற ஒரேமுறை (unique) அமைப்பு மாற்றம் உண்டு.

மேலும், $\{T_{ij}: 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கை $m\,n$ ஆகும்.

$\therefore$ இது $L(U, V)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் அடிப்படைக் கணம் என நிறுவுதல் போதுமானது.

(i) $\{T_{ij}\}$ ஒருபடிச் சார்பற்றது

$a_{ij} \in F$ என்க.

$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ T_{ij} = O$ என்க.

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij} \right)(x_k) = \hat{O}(x_k)$$

அல்லது, $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} T_{kj}(x_k) = o, \quad (\because \ T_{ij}(x_k) = o, i \neq k)$

$$(\text{அ-து}) \ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j = o$$

ஆனால், $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ஒருபடிச் சார்பற்றது.

$\therefore \quad a_{kj} = o \quad \forall j$

$\therefore \quad a_{ij} = o \quad \forall i, j$

எனவே, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij} = o$

$\Rightarrow a_{ij} = o \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, m$
$\qquad\qquad\qquad\; j = 1, 2, \ldots, n$

$\therefore \quad \{T_{ij}\}$ ஒருபடிச் சார்பற்றது.

(ii) $\mathbf{L(U, V) = L(B_3), B_3 = \{T_{ij}\}}$.

(அ-து) $T = L(U, V)$ என்ற எந்த ஒருபடி நிலைமாற்றமும், T_{ij}-ன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும் என நிறுவுவோம்.

$T \in L(U, V)$,

$T(x_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$ என்க.

$z_i \in V$, மேலும் V-ன் அடிப்படை B_2.

$\therefore \quad T(x_i) = z_i$ கணம் B_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடி சேர்க்கையாக விளக்கப்படக்கூடும்.

(அ-து) $a_{ij} \in F$ என்ற திசையிலிகள்

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i, \; j = 1, 2, \ldots, m \quad \text{—(2)}$$

என்றவாறு இருக்கும்.

அடுத்து, $S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij}$ என்க.

$\therefore \quad T = S$ என நிறுவுவது போதுமானது.

$$S(x_k) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij} \right)(x_k) = \Sigma \, \Sigma \, a_{ij} T_{ij}(x_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} T_{kj}(x_k) \quad \text{((1)-ன்படி)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j \quad (\because \; \text{(1)-ன் படி})$$

$$= z_k \quad (\because \; \text{(2)-ன் படி})$$

$\therefore \quad S(x_k) = z_k, K = 1, 2, \ldots, m$

மேலும், $T(x_k) = z_k, K = 1, 2, \ldots, m$

$\therefore \quad S(x_k) = T(x_k)$

(அ-து) $\{T_{ij}\}$ கணம் $L(U, V)$-ஐ பிறப்பிக்கின்றது.

எனவே, $\{T_{ij}\}$ என்பது $L(U, V)$ என்ற வெளியின் அடிப்படைக் கணமாகும். $\{T_{ij}\}$-ல் உள்ள மூலகங்கள் $m\,n$.

$\therefore$ பரிமாணம் $[L(U, V)] = m\,n$
$= $ பரிமாணம் $[U]$. பரிமாணம் $[V]$.

குறிப்பு :

$T: U \rightarrow V$ எனின்,

பரிமாணம் $[L(U, U)] =$ பரிமாணம் (U). பரிமாணம் (U)
$= m.m = m^2$

மாதிரி–3

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ என்ற ஓர் உருமாற்றம்

$T(a, b, c) = (c, a + b)$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$x = (a_1, b_1, c_1), y = (a_2, b_2, c_2) \in V_3(R)$; $a, b \in R$

$\Rightarrow ax + by \in V_3(R)$.

$$\begin{aligned}
T(ax + by) &= T[a(a_1, b_1, c_1) + b(a_2, b_2, c_2)] \\
&= T[(aa_1, ab_1, ac_1) + (ba_2, bb_2, bc_2)] \\
&= T[aa_1 + ba_2, ab_1 + bb_2, ac_1 + bc_2] \\
&= [ac_1 + bc_2, aa_1 + ba_2 + ab_1 + bb_2] \\
&= [ac_1 + bc_2, a(a_1 + b_1) + b(a_2 + b_2)] \\
&= [a(c_1, a_1 + b_1) + b((c_2, a_2 + b_2)] \\
&= a\,T(a_1, b_1, c_1) + b\,T(a_2, b_2, c_2) \\
&= a\,T(x) + b\,T(y).
\end{aligned}$$

(அ-து) $T(ax + by) = a\,T(x) + b\,T(y)$.

T ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

மாதிரி – 4

$T_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ —(i)

$T_2(x_1, x_2) = (o, x_2)$ —(ii)

என்ற முறையில் $T_1 : V_2(R) \rightarrow V_2(R)$
$T_2 : V_2(R) \rightarrow V_2(R)$ என்பவை
இரு ஒருபடி நிலைமாற்றங்களெனின், அவை பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டவையா என்பதை ஆராய்க.

நிரூபணம்

$$T_1 T_2 (x_1, x_2) = T_1 [T_2 (x_1, x_2)]$$
$$= T_1 [o, x_2] \quad \text{—(ii)-ன் படி}$$
$$= (x_2, o) \quad \text{—(i)-ன் படி.}$$
$$T_2 T_1 (x_1, x_2) = T_2 [T_1 (x_1, x_2)]$$
$$= T_2 [x_2, x_1] \quad \text{—(i)-ன் படி}$$
$$= (o, x_1). \quad \text{—(ii)-ன் படி}$$
$$\therefore \quad T_1 T_2 \neq T_2 T_1$$

T_1, T_2 என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் மேல் குறிப்பிட்ட விதிகளுக்கு உட்படின், பரிமாற்று விதிக்கு உட்படாது.

மாதிரி–5

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ என்ற உருமாற்றம்
$T(a, b, c) = (3a - 2b + c,\ a - 3b - 2c)$ என வரையறுக்கப்படின், அது ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிரூபி.

நிரூபணம்

$$x = (a_1, b_1, c_1),\ y = (a_2, b_2, c_2) \in V_3(R),\ a, b \in F$$
$$\Longrightarrow \quad ax + by \in V_3(R).$$
$$\therefore \quad T(ax + by) = T[a(a_1, b_1, c_1) + b(a_2, b_2, c_2)]$$
$$= T[(aa_1, ab_1, ac_1) + (ba_2, bb_2, bc_2)]$$
$$= T[aa_1 + ba_2, ab_1 + bb_2, ac_1 + bc_2]$$
$$\therefore \quad T(ax + by)$$
$$= [3(aa_1 + ba_2) - 2(ab_1 + bb_2) + (ac_1 + bc_2),$$
$$(aa_1 + ba_2) - 3(ab_1 + bb_2) - 2(ac_1 + bc_2)]$$
$$= [a(3a_1 - 2b_1 + c_1) + b(3a_2 - 2b_2 + c_2),$$
$$a(a_1 - 3b_1 - 2c_1) + b(a_2 - 3b_2 - 2c_2)]$$
$$= [\{a(3a_1 - 2b_1 + c_1), a(a_1 - 3b_1 - 2c_1)\}$$
$$+ \{b(3a_2 - 2b_2 + c_2), (a_2 - 3b_2 - 2c_2)\}]$$
$$= [a\{(3a_1 - 2b_1 + c_1), (a_1 - 3b_1 - 2c_1)\}$$
$$+ b\{(3a_2 - 2b_2 + c_2), (a_2 - 3b_2 - 2c_2)\}]$$
$$= a\,T(a_1, b_1, c_1) + b\,T(a_2, b_2, c_2)$$
$$= a\,T(x) + b\,T(y).$$

(அ-து) $T(ax + by) = a\,T(x) + b\,T(y)$

எனவே, T ஒருபடி நிலை மாற்றம்.

மாதிரி–6

$T : V_2(R) \to R$ என்ற உருமாற்றம்,
$T(a, b) = a\,b$ என வரையறுக்கப்படின், அது ஒருபடி நிலைமாற்றம் அல்ல என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2) \in V_2(R)\,;\, l, m \in F$
$\Rightarrow lx + my \in V_2(R).$

$$\begin{aligned} \therefore\ T(lx + my) &= T[\,l(a_1, b_1) + m(a_2, b_2)] \\ &= T[\,(la_1, lb_1) + (ma_2, mb_2)\,] \\ &= T[\,la_1 + ma_2,\ lb_1 + mb_2\,] \\ &= (la_1 + ma_2)(lb_1 + mb_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\,T(x) + m\,T(y) &= l\,T(a_1, b_1) + m\,T(a_2, b_2) \\ &= l(a_1\,b_1) + m(a_2\,b_2) \\ &= la_1\,b_1 + m\,a_2\,b_2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ T(lx + my) \neq l\,T(x) + m\,T(y).$$

மாதிரி–7

அனைத்து $m \times n$ அணிகளது வெக்டர் வெளி $V(F)$, அதே களத்தில் அமைந்த P, Q என்பவை முறையே $m \times m$, $n \times n$ என்ற இரு நிலைத்த அணிகள் என்க. பின், $T(A) = P\,A\,Q$ என்ற முறையில் அமைந்துள்ள $T : U \to V$ என்ற உருமாற்றம் ஒருபடி நிலை மாற்றம் என நிரூபி.

நிரூபணம்

P ஒரு $m \times m$ அணி, A ஒரு $m \times n$ அணி.

$\therefore$ $P\,A$ ஒரு $m \times n$ அணியாகும்.

Q ஒரு $n \times n$ அணியாதலால்,

$P\,A\,Q$ ஒரு $m \times n$ அணியாகும்

$\therefore$ $P\,A\,Q \in V(F).$

$A, B \in V(F)\,;\, a, b \in F \Rightarrow aA + bB \in V(F).$

$$\therefore \quad T(aA + bB) = P(aA + bB)Q$$
$$= (a\,PA + b\,PB)Q$$
$$= a\,PAQ + b\,PBQ$$
$$= a\,T(A) + b\,T(B)$$

$\therefore$ T ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

மாதிரி – 8

F களத்தின்மீது அமைந்த n பரிமாண வெக்டர்வெளி V, T: V → V ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின், T-ன் வீச்சும் (Range), பூச்சிய வெளியும் ஒன்றுயிருப்பின் (Identical), **n ஓர் இரட்டை எண் என நிறுவுக.**

நிரூபணம்

T-ன் தரம் (Rank) + T-ன் பூச்சிய பரிமாணம்
= V-ன் பரிமாணம் —(1)

$R(T)$-ம், $N(T)$-ம் சர்வசமமாதலின் (ஒன்றுயிருப்பின்)
$R(T)$-ன் பரிமாணம் = $N(T)$-ன் பரிமாணம்

(அ-து) T-ன் தரம் = T-ன் பூச்சிய பரிமாணம்

$\therefore$ (1) லிருந்து,

2 [T-ன் தரம்] = n [$\because$ பரிமாணம் $U = n$]

$\therefore$ T-ன் தரம் $= \dfrac{n}{2}$,

எனவே, n இரட்டை முழு எண்ணாகும்.

மாதிரி–9

$N(T)$, $R(T)$ ஆகிய இரண்டும் சர்வசமமாக இருக்குமாறு அமையும் T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்திற்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டு காண்க.

நிரூபணம்

$T: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$
என்ற ஒரு நிலைமாற்றம்

$T(a_1, a_2) = (a_2, o), \ \forall\, a_1, a_2 \notin R$
என்றவாறு உள்ளது என்க.

$N(T) = \{x:\ T(x) = o\}$
$T(x) = T(a_1, a_2) = (a_2, o) = (o, o).$

$\therefore \quad a_2 = o.$

எனவே, $x = (a_1, o)$

$\therefore\ N(T) = \{ (a_1, o) : T(a_1, o) = (o, o) \}, \forall x \in R$ —(i)

$R(T) = \{ y : y = T(x) \}$

$$\begin{aligned} y \in R(T) &= T(x) \\ &= T(a_1, a_2) \\ &= (a_2, o) \end{aligned}$$

மேலும், $(a_1, a_2) = a_1 (1, 0) + a_2 (o, 1)$
$= a_1 x_1 + a_2 x_2 \ ; \ x_1, x_2 \in V_2(R)$

$$\begin{aligned} \therefore\ y = T(x) &= T(a_1, a_1) \\ &= T[a_1 x_1 + a_2 x_2] \\ &= a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) \\ &= a_1 T(1, o) + a_2 T(o, 1) \\ &= a_1 (o, o) + a_2 (1, o) \end{aligned}$$

எனவே, (o, o), $(1, o)$ என்ற வெக்டர்கள் $R(T)$-ஐ பிறப்பிக்கும். பூச்சிய வெக்டரைத் தவிர்த்து $R(T)$ என்பது $(1, o)$ என்ற வெக்டரினுல் பிறப்பிக்கப்படுகிறது எனலாம்.

$\therefore\ R(T) = \{ a_1 (1, 0) : a_1 \in R \}$

(அ-து) $R(T) = \{ (a_1, o) : a_1 \in R \}$

(1)-ன் படி, $N(T) = \{ (a_1, o) : T(a_1, o) = o \}$

எனவே, $R(T)$, $N(T)$ ஆகிய இரண்டும் சர்வ சமமாக அமைந்துள்ளன. இதற்கான T-மாற்றம்

$T(a_1, o_2) = (a_2, o)$.

மாதிரி–10

$V_3(R)$ என்பது ஒரு வெக்டர் வெளி என்க. பின்,

$$T \neq o,\ T^2 \neq o,\ T^3 = o$$

என்ற முறையில் அமைந்துள்ள, T என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்திற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு காண்க.

நிரூபணம்

$T(a, b, c) = (o, a, b), \quad \forall (a, b, c) \in V_3(R)$
என்று T-ஐ வரையறுப்போம்.

$\therefore\ T \neq O.$

$$\begin{aligned} T^2 (a, b, c) &= T[T(a, b, c)] \\ &= T[o, a, b) \\ &= [o, o, a] \neq o \end{aligned}$$

அடுத்து,

$$\begin{aligned} T^3(a, b, c) &= T^2[T(a, b, c)] \\ &= T^2[o, a, b] \\ &= T[T(o, a, b)] \\ &= T[o, o, a] \\ &= (o, o, o) = o \end{aligned}$$

$\therefore \quad T(a, b, c) = (o, a, b)$ எனின்,

$T \neq o, \ T^2 \neq o, \ T^3 = o.$

பயிற்சி 5–1

1. $T: V_4(R) \rightarrow V_3(R)$ என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 - a_2 + a_3 + a_4, \ a_1 + 2a_3 - a_4, \ a_1 + a_2 + 3a_3 - 3a_4), \ a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$$

என்ற முறையில் இருப்பின், $R(T)$-ன் அடிப்படையையும் பரிமாணத்தையும் காண்க.

[விடை : $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}, \ P(T) = 2$]

2. $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2, a_2 + a_3), \ \forall (a_1, a_1, a_3) \in V_3(R)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ எனின், (i) $R(T)$, (ii) $N(T)$ ஆகியவற்றின் அடிப்படைகள், பரிமாணங்கள் காண்க.

[விடை: (i) $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$; $P(T) = 2$

(ii) $B = \{1, -1, 1)\}$: $P(T) = 1$]

3. F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(F)$,

$T: V \rightarrow V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கூற்றுகளும் சமம் என நிரூபி.

(i) $R(T) \cap N(T) = \{o\}$

(ii) $T[T(x)] = o \Rightarrow T(x) = o.$

4. $T(x, y) = |x - y|$ என்ற முறையில் உள்ள $T: V_2(R) \rightarrow R$ என்ற நிலை மாற்றம் ஒருபடி நிலை மாற்றம் அல்ல என நிரூபி.

5. $T(a_1, a_2, a_3) = (a_3, a_1 + a_2)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ என்ற நிலைமாற்றம் ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுக.

6. $T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1)$ என்ற $T: V_2(R) \to R$ உருமாற்றம் ஒருபடி நிலை மாற்றம் எனக் காண்பி.

7. அனைத்து $n \times n$ அணிகளது வெக்டர் வெளி $V(F)$ என்க. P ஒரு நிலைத்த $n \times n$ அணி எனின்,

$$T(A) = AP - PA$$

என்று வரையறுக்கப்படும். $T : V \to V$ என்ற உருமாற்றம் ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிரூபி.

8. அனைத்து $m \times n$ அணிகளது வெக்டர் வெளி $V(F)$. P, Q என்பவை முறையே $m \times m$, $n \times n$ அணிகளாகும்.
$T(A) = P\,A\,Q$ என்ற வரையறைக்குட்பட்ட T என்ற அமைப்பு மாற்றம் (உருமாற்றம்) ஒருபடி நிலை மாற்றம் என நிரூபி.

9. V ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி. $T: V \to V$ என்பது T^2-ன் தரம் $=$ T-ன் தரம் என்றவாறு அமைந்துள்ள ஒருபடி நிலை மாற்றம் எனின், T-ன் வீச்சும், பூச்சிய வெளியும் ஒன்றாத வெளிகள் (disjoint spaces) என நிரூபி.

10. $T: U \to V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம். U முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி. பின், T ஒருமையற்றதாய் இருந்தால் மட்டுமே U-ன் பரிமாணமும் T-ன் வீச்சின் பரிமாணமும் சமமாகும் என நிரூபி.

5-28. நேர்மாறு சார்பு (Inverse function)

$T: U \to V$ ஒரு ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம் (one-one-onto mapping) என்க. பின் $y \in U$ என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் $x \in U$ என்ற ஒரே முறை மூலகத்தை (unique element) தொடர்பு படுத்தும் $\bar{T}' : V \to U$ என்ற உருமாற்றம் T-ன் நேர்மாறு (Inverse) எனப்படும்.

T ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் என்பது U-ல் உள்ள வெவ்வேறு மூலகங்கள் V-ல் வெவ்வேறு விம்பங்களைக் (Images) கொண்டிருக்கும் என்பதைக் குறிக்கும்.

(அ-து) $T(x) = y$ அல்லது $x = \bar{T}'(y)$; $x \in U, y \in V$.

மீண்டும் T மேல் உருமாற்றம் என்பது V-ல் உள்ள அனைத்து மூலகங்களும் U-ல் உள்ள மூலகங்களது T-விம்பங்கள் என்பதைக் குறிக்கும். எனவே, V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $\bar{T}'$ விம்பம் U-ல் உண்டு.

ஆதலின் $\bar{T}'$ என்று குறிப்பிடப்படும் ஒரு ஒத்தியைபு (Correspondence) V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் U-ல் உள்ள ஒரே முறை மூலகத்துடன் (Unique element) தொடர்பு படுத்தும் வகையில் உள்ளது. ஆகவே, $\bar{T}'$ ஆனது V-லிருந்து U-க்கான ஒரு சார்பாகும்.

நேர்மாறு சார்பு (Inverse function) **இருப்பதற்கு வேண்டிய கட்டுப்பாடுகள்.**

(1) ஒன்றுக் கொன்றுன மேல் உருமாற்றம் மட்டுமே நேர் மாறு உருமாற்றம் கொண்டிருக்கும்.

$T: U \rightarrow V$ ஒன்றுக்கொன்றுனதல்ல என்க. பின், U-ல் உள்ள இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மூலகங்கள் V-ல் ஒரே T-விம்பத்தைக் கொண்டிருக்கும். அதனுல், V-ல் உள்ள மூலகத்திற்கு U-ல் $\bar{T}'$ விம்பம் ஒரே முறையில் இராது. ஆகவே, $\bar{T}'$ ஒரு உருமாற்றமாகாது.

மேலும் T மேல் உருமாற்றம் அல்ல எனின், V-ல் உள்ள சில மூலகங்கள் U-ல் உள்ள மூலகங்களது T-விம்பமாக இருக்காது. ஆகவே, V-ல் உள்ள அனைத்து மூலகங்களுக்கும் $\bar{T}'$ விம்பங்கள் U-ல் இராது. எனவே, $\bar{T}'$ உருமாற்றமாகாது.

ஆகவே, ஒன்றுக்கொன்றுன மேல் உருமாற்றம் மட்டுமே நேர் மாறு உருமாற்றம் கொண்டிருக்கும்.

(2) $\bar{T}': V \rightarrow U$ என்ற நேர்மாறு உருமாற்றமும் ஒன்றுக் கொன்றுன மேல் உருமாற்றமாகும்.

$$T: U \rightarrow V \qquad \therefore \quad T(x) = y, \quad x \in U, y \in V.$$

$$\bar{T}': V \rightarrow U \qquad \therefore \quad \bar{T}'(y) = x.$$

T உருமாற்றம் நேர்மாறு உருமாற்றம் கொண்டிருக்குமெனின் T ஒன்றுக்கொன்றுன மேல் உருமாற்றமாகும்.

$\therefore \quad T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

$T(x_1) = y_1$ என்க. $\qquad \therefore \quad \bar{T}'(y_1) = x_1$

$T(x_2) = y_2$ என்க. $\qquad \therefore \quad \bar{T}'(y_2) = x_2$

$$\bar{T}'(y_1) = \bar{T}'(y_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$\Rightarrow T(x_1) = T(x_2)$$
$$\Rightarrow y_1 = y_2$$

$\therefore$ $\bar{T}'$ ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாகும்.

மீண்டும் T மேல் உருமாற்றமாதலின் V-ல் உள்ள வெவ்வேறு மூலகங்கள் U-ல் உள்ள வெவ்வேறு மூலகங்களது T-விம்பங்களாகும். எனவே, U-ல் உள்ள வெவ்வேறு மூலகங்கள் V-ல் உள்ள வெவ்வேறு மூலகங்களது $\bar{T}'$ விம்பங்களாகும். எனவே, $\bar{T}' : V \to U$ மேல் உருமாற்றமாகும்.

$y \in V$ எனின்,

$T\bar{T}'(y) = T\{\bar{T}'(y)\} = T\{x\}\, y$

$\therefore$ $T\bar{T}'$ என்பது V-ல் சர்வசம உருமாற்றமாம்.

(அ-து) $T\bar{T}' = I_v$

$x \in U$ எனின்,

$\bar{T}'\,T(x) = \bar{T}'\{T(x)\} = \bar{T}'(y) = x$

$\therefore$ $\bar{T}'\,T = I_u$

எனவே, $\bar{T}' : V \to U$ ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றமாம். மேலும், $T\bar{T}' = I_v$, $\bar{T}'T = I_u$

குறிப்பு: $T: U \to V$ எனின், $\bar{T}' : U \to V$ ஆகும்.

$\therefore$ $T\bar{T}' = \bar{T}'\,T = I.$

(3) நேர்மாறு சார்பு ஒரே முறையில் இருக்கும்.

$T: U \to V$ நேர்மாறுத்தன்மை (Invertible) யுடையது என்க. (அ-து) T ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம் என்க. $T_1: V \to U$ $T_2: V \to U$ என்பவை T-ன் இரு நேர்மாறுகள் என்போம்.

T ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம்.

$\therefore$ $T(x) = y, \quad x \in U,\ y \in V$

$\therefore$ $T_1(y) = T_1\{T(x)\} = T_1\,T(x) = I_u\,x = x$

$T_2(y) = T_2\{T(x)\} = T_2\,T(x) = I_u\,x = x$

$\therefore$ $T_1(y) = T_2(y),\ \forall\, y \in V$

$\therefore$ $T_1 = T_2.$

எனவே, T-ன் நேர்மாறு ஒரே முறையில் இருக்கும்.

5-29. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த இரு வெக்டர் வெளிகள் U, V என்க. $T: U \to V$ ஒன்றுக் கொன்றான மேல் ஒருபடி நிலைமாற்றம்

(One-one-onto linear transformation) எனின், $\bar{T}': V \to U$ என்ற நேர்மாறு சார்பு ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுக.

நிருபணம்

$T: U \to V$ ஒன்றுக் கொன்றுன மேல் உருமாற்றமாதலின், $\bar{T}': V \to U$ என்ற ஒன்றுக் கொன்றுன மேல் உருமாற்றம் ஒரே முறையில் உள்ளது. மேலும், $T\bar{T}' = I_V$, $\bar{T}' T = I_U$. T ஒருபடி நிலைமாற்றமாதலின் $\bar{T}'$-ம் ஒருபடி நிலைமாற்றம் என இனி நிறுவுவோம்.

$$T: U \to V, \qquad \bar{T}': V \to U$$

$x_1, x_2 \in U; \quad y_1, y_2 \in V$ எனின்,

$$T(x_1) = y_1 \quad (அ) \quad x_1 = \bar{T}'(y_1)$$

$$T(x_2) = y_2 \quad (அ) \quad x_2 = \bar{T}'(y_2).$$

$$\therefore \; T(ax_1 + bx_2) = a\,T(x_1) + b\,T(x_2) = ay_1 + by_2 \in V$$

$\{x_1, x_2 \in U;\ a, b \in F \Rightarrow ax_1 + bx_2 \in U$ மேலும் T ஒருபடி நிலைமாற்றம்$\}$

$$\therefore \; \bar{T}'(ay_1 + by_2) = ax_1 + bx_2 = a\,\bar{T}'(y_1) + b\,\bar{T}'(y_2)$$

$\therefore$ $\bar{T}'$ ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

5-30. தேற்றம்

V என்ற வெக்டர் வெளி மீது T_1, T_2, T_3 என்ற ஒருபடிச் செயலிகள் (linear operators) $T_1 T_2 = T_3 T_1 = I$ என்றவாறு இருப்பின், T_1 நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

மேலும், $\bar{T}_1' = T_2 = T_3$.

நிருபணம்

$T_1 T_2 = T_3 T_1 = I$ (சர்வசமசெயலி) என்று T_1, T_2, T_3 செயலிகள் உள்ளன என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. T_1 நேர்மாறுத் தன்மையுடையது என நாம் நிறுவவேண்டும். (அ-து) T_1 ஒன்றுக் கொன்றுன மேல் உருமாற்றம் என நிறுவவேண்டும்.

$$T_1(x_1) = T_1(x_2)$$

$$\Rightarrow T_2 T_1(x_1) = T_2 T_1(x_2)$$

$$\Rightarrow I(x_1) = I(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ T_1 ஒன்றுக் கொன்றுனதாகும்.

அடுத்து, $y \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $T_2(y) = x$ என்றவாறு $x \in V$ என்று ஒரு வெக்டர் உண்டு.

$$\begin{aligned}
\therefore \quad y \in V &\Rightarrow T_2(y) = x \\
&\Rightarrow T_1[T_2(y)] = T_1(x) \quad (\because \ T_1 \text{ ஒரு உருமாற்றம்}) \\
&\Rightarrow (T_1 T_2)(y) = T_1(x) \\
&\Rightarrow I(y) = T_1(x) \qquad (\because \ T_1 T_2 = I) \\
&\Rightarrow y = T_1(x).
\end{aligned}$$

எனவே, T_1 ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றமாகும்.

$\therefore$ T_1 நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

இனி, $\bar{T}' = T_2 = T_3$ என நிறுவுவோம்.

கொடுத்துள்ளபடி, $T_1 T_2 = I$

$\therefore \quad \bar{T}_1'(T_1 T_2) = \bar{T}'(I) \qquad (\because \ \bar{T}_1'$ நேர்மாறுத் தன்மை யுடையது)

$\Rightarrow \quad (\bar{T}_1' T_1) T_2 = \bar{T}' \qquad$ (சேர்ப்பு விதிப்படி)

$\Rightarrow \quad I T_2 = \bar{T}_1'$

$\Rightarrow \quad T_2 = \bar{T}_1'$

மேலும், கொள்கைப்படி, $T_3 T_1 = I$

$\therefore \quad (T_3 T_1) \bar{T}_1' = I(\bar{T}_1')$

$\Rightarrow \quad T_3(T_1 \bar{T}_1') = \bar{T}_1' \quad (\because \ I$–சர்வசம செயலி)

$\Rightarrow \quad T_3 I = \bar{T}_1' \qquad (\because \ T_1 \bar{T}_1' = \bar{T}_1' T_1 = I)$

$\Rightarrow \quad T_3 = \bar{T}_1'$

எனவே, $T_2 = T_3 = \bar{T}_1'$.

5-31. தேற்றம்

F களத்தின் மீது அமைந்த $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது T என்பது ஒரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய செயலி என்க. பின்,

(1) aT ஒரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய செயலி, $a \neq 0 \in F$

(2) $\overline{(aT)}' = \frac{1}{a}\bar{T}'$

(3) T_1, T_2 நேர்மாறுத்தன்மையுடையது எனின், $(T_1 T_2)$ நேர்மாறுத் தன்மையுடையது. $\overline{(T_1 T_2)}' = \bar{T}_2' \bar{T}_1'$.

(4) T_1 நேர்மாறுத் தன்மையுடையதெனின், $\bar{T}_1'$-ம் நேர்மாறுத் தன்மையுடையது. மேலும் $\overline{(\bar{T}_1')}' = T_1$.

நிரூபணம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது $T: V \rightarrow V$ ஒரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய செயலி என்க. T ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றமாதலின்,

$$T\bar{T}' = \bar{T}' T = I$$

$a \neq o \in F$ என்க.

எனவே, $\bar{a}' = \frac{1}{a} \in F$ என்ற ஒரு மூலகம்

$$a\,\bar{a}' = I$$

என்றவாறு இருக்கும்.

(1) (aT) நேர்மாறுத் தன்மையுடைய செயலி. $a \neq o \in F$.

$a\,T(x) = (aT)(y)$

$\Rightarrow \quad T(ax) = T(ay) \qquad (\because \; T$ ஒருபடி நிலைமாற்றம்)

$\Rightarrow \quad ax = ay \qquad (\because \; T$ ஒன்றுக் கொன்றான து)

$\Rightarrow \quad x = y, a \neq o \qquad (\because \; ax = ay \Rightarrow \bar{a}'(ax) = \bar{a}'(ay)$

$\qquad \Rightarrow (\bar{a}'a)\,x = (\bar{a}'a)\,y \Rightarrow x = y)$

$\therefore$ $(a\,T)$ ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றம். மேலும், T ஒரு மேல் உருமாற்றம் எனின், $(a\,T)$-ம் ஒரு மேல் உருமாற்றமாகும்.

எனவே, (aT) ஒரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய உருமாற்றம். மீண்டும், $c, d \in F;\; x, y \in V \Rightarrow cx + dy \in V$.

$\therefore \quad (aT)(cx + dy) = T(acx + ady) \quad [\because \; T(ax) = aT(x)]$

$= ac\,T(x) + ad\,T(y)$

$= c\,(aT)\,x + d\,(aT)\,y$

(அ-து) $(aT)(cx + dy) = c\,(aT)\,x + d\,(aT)\,y$.

எனவே, (aT) ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

அதாவது, aT ஒரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

(2) $(a\,T)^{-\prime} = \frac{1}{a}\,\bar{T}'$

T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

$$\therefore \quad T\bar{T}' = \bar{T}'\;T = I$$

$(aT)(\bar{a}'\,\bar{T}') = a\,\bar{a}'\,T\,\bar{T}' = 1.\,I = I$

$(\bar{a}'\,\bar{T}')(aT) = \bar{a}'\,a\,\bar{T}'\,T = 1.\;I = I$

எனவே, $(a\,\bar{T})' = \bar{a}'\,\bar{T}' = \frac{1}{a}\,\bar{T}'$.

(3) $(T_1\,T_2)$ நேர்மாறுத் தன்மையுடையது. $\overline{(T_1\,T_2)}' = \bar{T}_2'\,\bar{T}_1'$.

கொடுத்துள்ளபடி, T_1, T_2 நேர்மாறுத் தன்மையுடையவை.

$$\therefore \quad T_1 \bar{T}^{1'} = \bar{T}_1' T = I$$
$$T_2 \bar{T}_2' = \bar{T}_2' T = I$$

மேலும், $\bar{T}_1'$, $\bar{T}_2'$ என்பவை ஒருபடி நிலை மாற்றங்கள்.

முதலில் $(T_1 T_2)$ ஒன்றுக் கொன்றுனவை என நிறுவுவோம்.

$(T_1 T_2) x_1 = (T_1 T_2) x_2, \ x_1, x_2 \in V$

$\Rightarrow \ T_1 [T_2 (x_1)] = T_1 [T_2 (x_2)]$
$\Rightarrow \ T_2 (x_1) = T_2 (x_2)$ ($\because$ T_1 ஒன்றுக் கொன்றுனது)
$\Rightarrow \ x_1 = x_2$

$\therefore$ $(T_1 T_2)$ ஒன்றுக் கொன்றுன உருமாற்றமாம்.

மீண்டும்,

$y \in V$ எனின், $T_1 (x) = y$ என்றவாறு $x \in V$ என்ற ஒரு வெக்டர் உண்டு. ($\because$ T_1 மேல் உருமாற்றம்)

மேலும், ஒவ்வொரு $x \in V$ என்ற வெக்டருக்கும் $z \in V$ என்ற வெக்டர்,

$T_2 (z) = x$ ($\because$ T_2 மேல் உருமாற்றம்)

என்றவாறு இருக்கும்.

$\therefore$ $y \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $z \in V$ என்ற ஒரு வெக்டர்,

$$\begin{aligned} y &= T_1 (x) \\ &= T_1 [T_2 (z)] \\ &= (T_1 T_2) (z) \end{aligned}$$

என்ற முறையில் இருக்கின்றது.

$\therefore$ $(T_1 T_2)$ மேல் உருமாற்றமாகும்.

எனவே, $(T_1 T_2)$ நேர்மாறு தன்மையுடையது.

மேலும், $\bar{T}_1'$, $\bar{T}_2'$ ஒருபடி நிலை மாற்றங்கள்.

எனவே, $(T_1 T_2) (\bar{T}_2' \bar{T}_1') = T_1 (T_2 \bar{T}_2') \bar{T}_1'$
$$\begin{aligned} &= T_1 (I) \bar{T}_1' \quad (\because \ T_2 \bar{T}_2' = I) \\ &= T_1 \bar{T}_1' \\ &= I \end{aligned}$$

இவ்வாறே,

$$(\bar{T}_2' \bar{T}_1') (T_1 T_2) = I.$$

$$\therefore \quad (T_1 T_2) (\bar{T}_2' \bar{T}_1') = (\bar{T}_2' \bar{T}_1') (T_1 T_2) = I.$$

எனவே, $(T_1 \bar{T}_2)' = \bar{T}_2' \bar{T}_1'$.

(4) $\overline{T}_1{}'$ நேர்மாறுத் தன்மையுடையது, $(\overline{T_1{}'})' = T_1$.

$x_1, y_1, \in V, \quad y_1 = T_1(x_1)$

$\Rightarrow \quad \overline{T}_1{}'(y_1) = x_1$ ($\because$ T_1 நேர்மாறுத் தன்மையுடையது).

$x_2, y_2 \in V, \quad y_2 = T_1(x_2)$

$\Rightarrow \quad \overline{T}_1{}'(y_2) = x_2$

$\therefore \quad y_1, y_2 \in V,$

$T_1{}'(y_1) = \overline{T}_1{}'(y_2)$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

$\Rightarrow \quad T_1(x_1) = T_1(x_2)$ ($\because$ T_1 ஒருபடி நிலைமாற்றம்)

$\Rightarrow \quad y_1 = y_2.$

$\therefore \quad \overline{T}_1{}'$ ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றம்.

மீண்டும், T_1 ஒரு உருமாற்றமாதலின் $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $y \in V$ என்ற ஒரு வெக்டர்

$$y = T_1(x)$$

என்றவாறு இருக்கும்.

(அ-து) $\overline{T}_1{}'(y) = x.$

$\therefore \quad \overline{T}_1{}'$ ஒரு மேல் உருமாற்றம்.

எனவே, $\overline{T}_1{}'$ நேர்மாறுத் தன்மையுடையதாகும்.

மேலும்,

$$(T_1 \overline{T}_1{}') = (\overline{T}_1{}' T_1) = I$$

$$\therefore \quad (\overline{T}_1{}') = T_1.$$

மாதிரி – 1

$V_3(R)$ வெக்டர் வெளியின் மீதுள்ள T என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம்

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, \ y - 4z, \ z)$$

எனின், $\overline{T}'$–ஐக் காண்க.

$a = x - 3y - 2z, \ b = y - 4z, \ c = z$ என்க.

$\therefore \quad z = c.$

$$y = b + 4z = b + 4c$$

$$x = a + 3y + 2z = a + 3(b + 4c) + 2c$$

$$= a + 3b + 14c$$

$$\therefore \quad T(x, y, z) = [x-3y-2z,\ y-4z,\ z]$$
$$= [a, b, c]$$
$$\therefore \quad \bar{T}^1(a, b, c) = (x, y, z)$$
$$= [a + 3b + 14c,\ b + 4c,\ c]$$
$$\therefore \quad \bar{T}^1(x, y, z) = [x + 3y + 14z,\ y + 4z,\ z]$$

மாதிரி – 2

$T(a, b, c) = (3a, a-b, 2a+b+c)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $T: V_3(R) \to V_3(R)$ என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம் நேர்மாறுத் தன்மையுடையது என நிறுவுக. $\bar{T}^1$-ஐக் காண்க. மேலும், $(T^2 - I)(T-3I) = O$ என நிரூபி.

(i) T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது (Invertible).

$x_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $x_2 = (a_2, b_2, c_2) = V_3(R)$ எனின்,

$T(x_1) = T(x_2)$

$$\Rightarrow \quad T(a_1, b_1, c_1) = T(a_2, b_2, c_2)$$
$$\Rightarrow \quad (3a_1, a_1 - b_1, 2a_1 + b_1 + c_1) = (3a_2, a_2 - b_2, 2a_2 + b_2 + c_2)$$
$$\therefore \quad a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2$$

எனவே, T ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாம்.

$T(a, b, c) = (p, q, r)$ என்க.

ஆனால், $T(a, b, c) = (3a, a-b, 2a+b+c)$

$$\therefore \quad p = 3a,\ q = a-b,\ r = 2a+b+c$$
$$\therefore \quad a = \frac{p}{3},\ b = a-q = \frac{p}{3} - q = \frac{p-3q}{3}$$
$$c = r - 2a - b = r - \frac{2p}{3} - \frac{p-3q}{3}$$
$$= \frac{3r-2p-p+3q}{3} = \frac{-3p+3q+3r}{3} = -p+q+r$$
$$\because \quad p, q, r, \in R,\ a, b, c, \in R$$

எனவே, $(a, b, c) \in V_3(R)$.

$\therefore$ T ஒரு மேல் உருமாற்றம் ஆகும்.

T ஒரு ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றமாதலின், அது நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

(ii) $\bar{T}'$-ஐக் காணுதல்

$T(a, b, c) = (p, q, r)$ எனின்,

$\bar{T}'(p, q, r) = (a, b, c)$

$$= \left(\frac{p}{3}, \frac{p-3q}{3}, -p+q+r\right)$$

$$\therefore \bar{T}'(a, b, c) = \left(\frac{a}{3}, \frac{a-3b}{3}, -a+b+c\right)$$

(lii) $(T^2 - I)(T-3I) = O$

$(T-3I)(a, b, c) = T(a, b, c) - 3I(a, b, c)$

$= (3a, a-b, 2a+b+c) - 3(a, b, c)$

$= (o, a-4b, 2a+b-2c)$

$\therefore (T^2 - I)(T-3I)$

$= (T^2 - I)(o, a-4b, 2a+b-2c)$

$= T^2(o, a-4b, 2a+b-2c) - I(o, a-4b, 2a+b-2c)$

$= T^2(x_1, x_2, x_3) - I(x_1, x_2, x_3)$

$(x_1 = o, x_2 = a-4b, x_3 = 2a+b-2c$ என்க)

$T^2(x_1, x_2, x_3) = T[T(x_1, x_2, x_3)]$

$= T[3x_1, x_1-x_2, 2x_1+x_2+x_3]$

$= T[y_1, y_2, y_3]$

$(y_1 = 3x_1, y_2 = x_1-x_2, y_3 = 2x_1+x_2+x_3$ என்க).

$= (3y_1, y_1-y_2, 2y_1+y_2+y_3)$

$= [3(3x_1), 3x_1-(x_1-x_2), 2(3x_1)+(x_1-x_2)+(2x_1+x_2+x_3)]$

$= (9x_1, 2x_1+x_2, 9x_1+x_3)$

$= [9(o), 2(o)+(a-4b), 9(o)+2a+b-2c]$

$= [o, a-4b, 2a+b-2c]$.

$I(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$= [o, a-4b, 2a+b-2c]$

$\therefore (T^2-I)(T-3I)$

$= T^2(o, a-4b, 2a+b-2c) - I(o, a-4b, 2a+b-2c)$

$= T^2(x_1, x_2, x_3) - I(x_1, x_2, x_3)$

$= [o, a-4b, 2a+b-2c] - [o, a-4b, 2a+b-2c]$

$= O$

மாதிரி–3

வெக்டர் வெளி V மீது T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. $T^2 - T + I = O$ எனின், T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $T^2 - T + I = O$

$\therefore \quad T^2 = T - I$

$\therefore \quad T^2(x) = (T - I)x = T(x) - I(x) = y - x, \ T(x) = y$ என்க.

$\therefore \quad T[T(x)] = y - x$ (அ-து) $T(y) = y - x$

$T(y) = z$ எனின், $z = y - x$.

(i) T ஒன்றுக் கொன்றானது

$T(x_1) = T(x_2)$ எனவே, $y_1 = y_2$

$\therefore \quad T(y_1) = T(y_2) \Rightarrow z_1 = z_2$

$\Rightarrow \quad y_1 - x_1 = y_2 - x_2 \Rightarrow y_1 - y_2 = x_1 - x_2$

$y_1 = y_2$ ஆதலின், $o = x_1 - x_2 \quad \therefore \quad x_1 = x_2$

எனவே, T ஒன்றுக் கொன்றானது.

(ii) T மேல் உருமாற்றம்

$y \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $T(y) = z$ என்ற முறையில் $z \in V$ என்ற வெக்டர் உள்ளது.

$z = y - x$ ஆதலின், $y \in V$ என்ற வெக்டருக்கு $y - x \in V$ என்று இருக்கும்.

(அ-து) $y \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $T(x) = y$ என்றவாறு $x \in V$ என்ற வெக்டர் உண்டு.

$\therefore \quad T$ ஒரு மேல் உருமாற்றம்

எனவே, T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

பயிற்சி 5–2

1. $V_3(R)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது அமைந்துள்ள T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம்,

$$T(x, y, z) = (2x, 2x - 5y, 2y + z)$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், T-ன் நேர்மாறைக் காண்க.

[விடை: $T'(x, y, z) = \left[\dfrac{x}{2}, \dfrac{x - y}{5}, \dfrac{-2x + 2y + 5z}{5}\right]$

2. V என்ற வெக்டர் வெளி மீது $T^2 - T + I = O$ என்ற முறையில் உள்ள T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் நேர்மாறுத் தன்மையுடையது என நிறுவுக.

3. V என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி மீதமைந்துள்ள ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் T_1, T_2 எனின், $T_1 T_2 = I$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) T_1, T_2 இரண்டும் நேர்மாறுத் தன்மையுடையவை.

(ii) $T_2 = T_1'$.

4. $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

என்பவை முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் இரு வரிசைப்பட்ட அடிப்படைக் கணங்களெனின், $T(x_i) = y_i$ என்ற முறையில் V-ன் மீது ஒரே முறை (unique) நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒன்று உண்டு என நிறுவுக.

5. $V_2(c)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் பின் வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$T(a, b) = (a\alpha + b\beta, \gamma a + \delta b); \; a, b \in V_2(c)$$
$$\alpha, \beta\, \gamma, \delta \in c.$$

$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq o$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் மட்டுமே T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது என நிரூபி.

ஒருபடிச் சார்புகள் (அ) திசையிலி மதிப்புடைய சார்புகள் (Linear Functionals or Scalar valued functions)

5-32. ஒருபடிச் சார்புகள் — வரையறை

$V(F)$ என்பது களம் F-ன் மீதமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளி என்க. பின் $T: V \rightarrow F$ என்ற உருமாற்றம்:

$$T(ax + by) = a\,T(x) + b\,T(y), \;\; \forall\, x, y \in V; a, b \in F$$

என்றவாறு இருப்பின், V மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்பு எனப்படும்.

5-33. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது $T: V \rightarrow F$ என்றவாறு அமைந்துள்ள உருமாற்றம் $T(x) = o, \forall\, x \in V$ என்றிருப்பின், அது ஒருபடிச் சார்பாகும்.

நிரூபணம்

$$x, y \in V;\ a, b \in F \Rightarrow ax + by \in V$$

$$\therefore\ T(ax + by) = o \qquad (\because\ T(x) = o)$$
$$= a.o + b.o$$
$$= aT(x) + bT(y)$$

(அ-து) $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

எனவே, T ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

இது பூச்சிய சார்பு (zero functional) எனப்பட்டு $\hat{O}$ எனக் குறியிடப்படும்.

5–34. தேற்றம்

$V(F)$ ஒரு வெக்டர் வெளி, T அதன் மீதமைந்த ஒருபடிச்சார்பு (Linear functional) எனின்,

$$(-T)(x) = -T(x) \qquad \forall\ x \in V$$

என்றவாறு உள்ள $-T: V \to F$ என்ற உருமாற்றம் V மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்பாகும்.

நிரூபணம்

$$x, y \in V;\ a, b \in F \Rightarrow ax + by \in V.$$

$$\therefore\ (-T)(ax + by) = -[T(ax + by)]$$
$$= -[aT(x) + bT(y)]$$
$$= -aT(x) - bT(y)$$
$$= a[-T(x)] + b[-T(y)]$$
$$= a(-T)(x) + b(-T)(y)$$

$\therefore$ $(-T)$ ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

மாதிரி– 1

$V(R)$ என்பது மெய்யெண்களது களத்தின் மீதமைந்த அனைத்து $p(t)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி எனின்,

$$T: V(R) \to R$$

என்ற உருமாற்றம்

$$T[p(t)] = \int_0^1 p(t)\, dt$$

என்றவாறு இருப்பின், T ஒருபடிச் சார்பு (Linear functional) என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$p_1(t), p_2(t) \in V(R)$; $a, b \in R$ எனின்,

$$ap_1(t) + b\,p_2(t) \in V(R)$$

$$\therefore\ T[ap_1(t) + b\,p_2(t)]$$

$$= \int_0^1 [a\,p_1(t) + b\,p_2(t)]\,dt$$

$$= \int_0^1 a\,p_1(t)\,dt + \int_0^1 b\,p_2(t)\,dt$$

$$= a\int_0^1 p_1(t)\,dt + b\int_0^1 p_2(t)\,dt$$

$$= a\,T[p_1(t)] + b\,T[p_2(t)].$$

$\therefore$ T என்பது $V(R)$ மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

5–35. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற ஒரு வெக்டர் வெளி மீதமைந்த அனைத்து ஒருபடிச் சார்புகளது (Linear functionals) கணம் V^* பின் வரும் கூட்டல், திசையிலி பெருக்கல் விதிகளுக்குட்பட்டு F களத்தின் மீதமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளியாம்.

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

$$(aT)(x) = a[T(x)],\ T_1\,T_2 \in V^*;\ x \in V;\ a \in F.$$

நிரூபணம்

ஒரு வெக்டர் வெளியினது அனைத்து விதிகளும் V^*-க்குப் பொருந்துமெனின், V^* ஒரு வெக்டர் வெளியாகும்.

இனி வெக்டர் வெளியின் விதிகள் அனைத்தும் V^* கணத்திற்குப் பொருந்துகின்றனவா என ஆராய்வோம்.

(1) $\mathbf{T_1, T_2 \in V^* \Rightarrow (T_1 + T_2) \in V^*}$

$$T_1, T_2 \in V^* \Rightarrow T_1(x), T_2(x) \in F,\ \forall\, x \in V$$
$$\Rightarrow T_1(x) + T_2(x) \in F.$$

$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \in F.$ (கொள்கை)

$x, y \in V;\ a, b \in F \Rightarrow ax + by \in V.$

$$\therefore \quad (T_1 + T_2)(ax + by) = T_1(ax + by) + T_2(ax + by)$$
$$= [a\,T_1(x) + b\,T_1(y)] + [a\,T_2(x) + b\,T_2(y)]$$
$$= a[T_1(x)] + a[T_2(x)] + b[T_1(y)] + b[T_2(y)]$$
$$= a[T_1(x) + T_2(x)] + b[T_1(y) + T_2(y)]$$
$$= a[(T_1 + T_2)(x)] + b[(T_1 + T_2)(y)]$$

(அ-து) $(T_1+T_2)(ax+by) = a[(T_1+T_2)(x)] + b[(T_1+T_2)(y)]$

$\therefore$ $(T_1 + T_2)$ ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

(அ-து) $T_1, T_2 \in V^* \Rightarrow (T_1 + T_2) \in V^*$.

(2) $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

$T_1, T_2, T_3 \in V^*$ எனின்,

$$[(T_1 + T_2) + T_3](x) = (T_1 + T_2)(x) + T_3(x), \quad \forall x \in V$$
$$= [T_1(x) + T_2(x)] + T_3(x)$$
$$= T_1(x) + [T_2(x) + T_3(x)]$$
$$= T_1(x) + [(T_2 + T_3)(x)]$$
$$= [T_1 + (T_2 + T_3)](x)$$

$$\therefore \quad (T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$$

(3) V*-ல் கூட்டு சர்வசம மூலகம் $\hat{O}$

$$(\hat{O} + T)(x) = \hat{O}(x) + T(x)$$
$$= O + T(x)$$
$$= T(x).$$

$$\therefore \quad \hat{o} + T = T$$

இவ்வாறே $T + \hat{o} = T$.

எனவே, V^*-ல் கூட்டு சர்வசம மூலகம் (additive identity) என்பது $\hat{o}$ ஆகும்.

(4) V*-ல் கூட்டு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு

$T \in V^*$ என்ற ஒவ்வொரு சார்புக்கும் $(-T) \in V^*$ என்ற சார்பு,

$$[T + (-T)(x)] = T(x) + (-T)(x)$$
$$= T(x) + [-T(x)]$$
$$= O$$
$$= \hat{o}(x)$$

$\therefore \quad T + (-T) = \hat{o}$

இவ்வாறே, $(-T) + T = \hat{o}$.

எனவே, V^*-ல் கூட்டு நேர்மாறு மூலகம் (additive inverse) ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் உண்டு.

குறிப்பு :

$$\begin{aligned}(-T)(ax + by) &= -[T(ax + by)] \\ &= -[aT(x) + bT(y)] \\ &= -aT(x) - bT(y) \\ &= a[-T(x)] + b[-T(y)] \\ &= a(-T)x + b(-T)y\end{aligned}$$

$\therefore \quad -T \in V^*$

(5) பரிமாற்று விதி

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x) &= T_1(x) + T_2(x)\,; \forall\, T_1, T_2 \in V^*\ x \in V \\ &= T_2(x) + T_1(x) \\ &= (T_2 + T_1)(x).\end{aligned}$$

$\therefore \quad T_1 + T_2 = T_2 + T_1\,, \forall\, x \in V.$

எனவே, V^* ஒரு பரிமாற்று குலமாகும். (Commutative group).

(6) $\mathbf{a \in F,\ T \in V^* \Rightarrow a\,T \in V^*}$

$T \in V^* \Rightarrow T(x) \in F, \qquad \forall\, x \in V.$

$\qquad \Rightarrow a\,T(x) \in F, \qquad \forall\, a \in F.$

$(aT)(x) = a[T(x)] \in F, \qquad \forall\, x \in V$ (வரையறை).

மீண்டும்,

$x, y \in V;\ c, d \in F \Rightarrow cx + dy \in V.$

$$\begin{aligned}(aT)(cx + dy) &= a[T(cx + dy)] \\ &= a[cT(x) + dT(y)] \\ &= a[cT(x)] + a[dT(y)] \\ &= (ac)T(x) + (ad)T(y) \\ &= (ca)T(x) + (da)T(y) \\ &= c[aT(x)] + d[aT(y)] \\ &= c[(aT)(x)] + d[(aT)(y)]\end{aligned}$$

$\therefore \quad aT$ ஒருபடிச் சார்பு (Linear functional) ஆகும்.

(அ-து) $a \in F,\ T \in V^* \Rightarrow aT \in V^*$

(7) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{T} = \mathbf{aT} + \mathbf{bT}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$a, b \in F; \quad T \in V^*$

$$\begin{aligned}[(a+b)T](x) &= (a+b)[T(x)] \\ &= a[T(x)] + b[T(x)] \\ &= (aT)(x) + (bT)(x) \\ &= (aT + bT)(x)\end{aligned}$$

(அ-து) $[(a+b)T](x) = (aT + bT)(x)$

$\therefore \quad (a+b)T = aT + bT$

(8) $\mathbf{a}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) = \mathbf{aT}_1 + \mathbf{aT}_2$

$T_1, T_2 \in V^*, \quad a \in F,$

$$\begin{aligned}[a(T_1 + T_2)(x) &= a[(T_1 + T_2)(x)] \\ &= a[T_1(x) + T_2(x)] \\ &= (aT_1)(x) + (aT_2)(x) \\ &= (aT_1 + aT_2)(x)\end{aligned}$$

$\therefore \quad a(T_1 + T_2) = aT_1 + aT_2, \quad \forall\, x \in V.$

(9) $(\mathbf{ab})\mathbf{T} = \mathbf{a}(\mathbf{bT})$

$$\begin{aligned}[(ab)T](x) &= (ab)[T(x)], \quad T \in V^*, \; a, b \in F. \\ &= a[b(T(x)] \\ &= a[(bT)(x)] \\ &= [a(bT)](x)\end{aligned}$$

$\therefore \quad (ab)T = a(bT), \quad \forall\, x \in V.$

(10) $\mathbf{1 \cdot T} = \mathbf{T} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$

V^*-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் T-க்கு, $I \in F$ என்ற மூலகம்

$$\begin{aligned}(IT)(x) &= I[T(x)] \qquad \forall\, x \in V \\ &= T(x)\end{aligned}$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

$\therefore \quad I.T = T, \quad \forall\, x \in V.$

ஆக ஒரு வெக்டர் வெளியின் அனைத்து விதிகளும் V^* என்ற கணத்திற்குப் பொருந்துவதால், V^* என்ற கணம் ஒரு வெக்டர் வெளியாம்.

5-36. துணை வெளி (Dual Space)

F களத்தின் மீதமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளி $V(F)$ என்க. பின் V மீதமைந்த அனைத்து ஒருபடிச் சார்புகளது (Linear functionals) கணம் V^* என்பது F களத்தின் மீதமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளியாகும். இது V வெளியின் துணை வெளி (dual space) எனப்படும்.

குறியீட்டின்படி,

$$V^* = \{T: T(x) \in V^* \quad \forall\, x \in V\}$$

5-37. தேற்றம் •

$V(F)$ என்பது ஒரு n பரிமாண வெக்டர் வெளி,
$A = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ என்பது V-ன் ஓர் அடிப்படை என்க. பின் $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற n மாறிலிகள் (constants) கொண்ட கணத்திற்கு

$$f(\xi_i) = x_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

என்றவாறு f எனும் ஒரேமுறை (unique) ஒருபடிச் சார்பு (linear functional) V-ல் இருக்கும்.

நிரூபணம்

A என்பது V-ன் ஓர் அடிப்படையாதலின்,

$$\xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n\,, \qquad \forall\, \xi \in V,\ a_i \in F.$$

இனி,

$$f(\xi) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n\,, \quad a_i \in F$$

என்ற முறையில் f எனும் ஒரு சார்பை வரையறுப்போம்.

$$a_i \in F\,, \quad x_i \in F$$

$$\therefore\ f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ \in F.$$

(அ-து) f எனும் சார்பு $\xi \in V$ என்ற வெக்டரை F-ல் உள்ள ஒரு மூலகத்திற்குத் தொடர்பு படுத்துகிறது. எனவே, f என்பது $V \to F$ என்றவாறுள்ள ஓர் அமைப்பு மாற்றமாகும்.

அடுத்ததாக, f ஒருபடிச் சார்பு என நிறுவுவோம்.

$\eta \in V$ எனின்,

$$\eta = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \ldots + b_n \xi_n$$
$$f(\eta) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n$$

என வரையறுப்போம்.

$$\therefore \quad a\xi + b\eta = a\,[a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n] + b\,[b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \dots + b_n \xi_n]$$

$$= (aa_1 + bb_1)\, \xi_1 + (aa_2 + bb_2)\, \xi_2 + \dots + (aa_n + bb_n)\xi_n$$

$$\therefore \quad f\,(a\xi + b\eta)$$

$$= f\,[(aa_1 + bb_1)\, \xi_1 + (aa_2 + bb_2)\, \xi_2 + \dots + (aa_n + bb_n)\, \xi_n]$$

$$= (aa_1 + bb_1)\, x_1 + (aa_2 + bb_2)\, x_2 + \dots + (aa_n + bb_n)\, x_n$$

$$= (aa_1 x_1 + aa_2 x_2 + \dots + aa_n x_n) + (bb_1 x_1 + bb_2 x_2 + \dots + bb_n x_n)$$

$$= a\,(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) + b\,(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)$$

$$= a\, f\,(\xi) + b\, f\,(\eta).$$

$\therefore$ f என்பது ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

மீண்டும் f-ன் வரையறைப்படி,

$$\xi_i = o.\xi_1 + o.\xi_2 + \dots + 1.\, \xi_i + \dots + o.\xi_n$$

$$\therefore \quad f\,(\xi_i) = o.x_1 + o.x_2 + \dots + 1.x_i + \dots + o.x_n$$

$$\therefore \quad f\,(\xi_i) = x_i$$

எனவே, $f\,(\xi_i) = x_i$, $\quad i = 1, 2, \dots, n.$

அடுத்து, f ஒரே முறையில் உள்ளது என நிறுவுவோம்.

$g\,(\xi_i) = x_i$, $\quad i = 1, 2, \dots, n$ என்க.

$$\therefore \quad g\,(\xi) = g\,(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n)$$
$$= a_1\, g\,(\xi_1) + a_2\, g\,(\xi_2) + \dots + a_n\, g\,(\xi_n)$$
$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$
$$= f\,(\xi)$$

$$\therefore \quad g\,(\xi) = f\,(\xi)$$

எனவே, f ஒரே முறையில் உள்ளது.

5-38. தேற்றம்

$V\,(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியின் பரிமாணமும் V-ன் துணை வெளியான V^*-ன் பரிமாணமும் ஒன்றே (same) ஆகும்.

நிரூபணம்

V-ன் ஓர் அடிப்படைக் கணம்

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ என்க.

பின், $x \in V$ என்ற எந்த ஒரு மூலகமும்

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

என்று ஒரே முறையில் A-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்மானமாக விளக்கப்படும்.

இனி, நாம் $V(F)$-ல்

$$S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

என்ற கணத்தை

$$f_j(x) = a_j \quad , \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

என்றவாறு வரையறுப்போம்.

$$(\text{அ-து}) \quad f_j(x) = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right), \qquad a_i \in F$$

$$= a_j$$

ஒவ்வொரு f_j-ம் V-ல் ஒரே முறையிலுள்ள ஒருபடிச் சார்பாகும்.

$$\text{மேலும், } f_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ ; \ i = j \\ o \ , \ i \neq j \end{cases}$$

அடுத்து,

$S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ என்ற ஒருபடிச் சார்புகள் V^*-ன் ஓர் அடிப்படை என நிறுவுவோம்.

$$b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_n f_n = o, \quad b_i \in F$$

என்ற தொடர்பைக் கருதுக.

$$\therefore \quad (b_1 f_1 + b_2 f_2 + \dots + b_n f_n)(x_j) = o(x_j)\ , \ j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\therefore \quad b_1 f_1(x_j) + b_2 f_2(x_j) + \dots + b_n f_n(x_j) = o$$

$$(\text{அ-து}) \quad \Sigma \ b_i \left[f_i(x_j)\right] = o\ , \ j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\therefore \quad \Sigma \ b_i \ \delta_{ji} = o \qquad (\because \ f_j(x_i) = \delta_{ij})$$

$$\therefore \quad b_j = o\ , \ j = 1, 2, \dots, n.$$

$$(\text{அ-து}) \quad b_1 = o, \ b_2 = o, \dots, b_n = o.$$

எனவே, கணம் S ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும்.

அடுத்தபடியாக,

$f \in V^*$ என்ற எந்த ஒருபடிச் சார்பும் S-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்மானம் என நிறுவுவோம்.

f என்பது V-ல் யாதாமொரு ஒருபடிச் சார்பு,

$f(x_i) c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ என்க.

பின் $f(x) = f(\Sigma a_i x_i)$
$= \Sigma a_i f(x_i)$
$= \Sigma a_i c_i$

ஆனால், $f_j(x) = f_j(\Sigma a_i x_i)$, $f \in V^*, x \in V.$
$= \Sigma a_i f_j(x_i)$
$= \Sigma a_i \delta_{ij}$
$= a_j$

$\therefore f(x) = \Sigma a_i c_i$
$= \Sigma c_i a_i$ ($\because$ F களத்தில் பரிமாற்றுவிதி பொருந்தும்)
$= \Sigma c_i f_i(x)$
$= [c_1 f_1(x)] + [c_2 f_2(x)] + \ldots + [c_n f_n(x)]$
$= (c_1 f_1)(x) + (c_2 f_2)(x) + \ldots + (c_n f_n)(x)$
$= (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n)(x)$
$= (\Sigma c_i f_i)(x)$

$\therefore f = \Sigma c_i f_i, \quad \forall x \in V.$

$\therefore f \in V^*$ என்ற எந்த ஒருபடிச் சார்பும் S-ல் உள்ள வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

(அ-து) $L(S) = V^*$

எனவே, $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ என்ற ஒருபடிச் சார்புகளது கணம் V^*-ன் அடிப்படையாகும். S-ல் உள்ள உறுப்புகளது எண்ணிக்கை n ஆதலின் V^*-ன் பரிமாணமும் n ஆகும்.

எனவே, V, V^* இரண்டும் ஒரே பரிமாணமுள்ளவையாகும்.

5-39. துணை அடிப்படை (Dual basis)

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் அடிப்படை என்க. பின்,

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

என்றவாறு உள்ள

$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ என்ற கணம் V^*-ன் அடிப்படைக் கணம் எனப்படும்.

δ_{ij} என்பது குரொனக்கர் டெல்டா (Kronecker delta) எனப்படும்.

மாதிரி-2

$V_2(R)$-ன் அடிப்படைக் கணம் $B = \{x = (1, 0),\ y = (0, 1)\}$ எனின், B-ன் துணை அடிப்படைக் கணம் (dual basis) காண்க.

நிரூபணம்

$$B = \{x = (1, 0),\ y = (0, 1)\}$$

என்பது V_2 (R)-ன் அடிப்படை யாதலின், அதன் துணை அடிப்படைக் கணமும் இரு மூலகங்கள் கொண்டிருக்கும்.

$B^* = \{f_1, f_2\}$ என்க.

இங்கு, $f_1(x, y) = a_1 x + a_2 y$

$f_2(x, y) = b_1 x + b_2 y$ என்றவாறு இருக்கும்.

மேலும் வரையறைப்படி

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\therefore\ f_1(x_1) = \delta_{11} = 1, \quad f_1(x_2) = \delta_{21} = o$$
$$f_2(x_1) = \delta_{12} = o, \quad f_2(x_2) = \delta_{22} = 1$$

$$\therefore\ 1 = f_1(x_1) = f_1(1, 0) = a_1.1 + a_2.o = a_1$$
$$o = f_1(x_2) = f_1(0, 1) = a_1.0 + a_2.1 = a_2$$
$$o = f_2(x_1) = f_2(1, 0) = b_1.1 + b_2.0 = b_1$$
$$1 = f_2(x_2) = f_2(0, 1) = b_1.o + b_2.1 = b_2$$

$$\therefore\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1$$

$$\therefore\ f_1(x, y) = a_1 x + a_2 y = x$$
$$f_2(x, y) = b_1 x + b_2 y = y$$

$\therefore\ B^* = B$-ன் துணை அடிப்படை
$= \{x, y\}$

(அ-து) $B^* = \{f_1(x, y) = x,\ f_2(x, y) = y\}$.

மாதிரி-3

$B\{(1, -1, 3),\ (0, 1, -1),\ (0, 3, -2)\}$ என்பது $V_3(R)$-ன் ஓர் அடிப்படைக் கணம் எனின், அதன் துணை அடிப்படைக் கணம் B^* காண்க.

நிரூபணம்

$$B = \{(1,-1,3),\ (0,1,-1),\ (0,3,-2)\}$$

$\therefore$ B^*-லும் மூன்று மூலகங்கள் உண்டு.

$B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ என்க.

இங்கு $f_1\ (x, y, z) = a_1 x + a_2 y + a_3 z$

$f_2\ (x, y, z) = b_1 x + b_2 y + b_3 z \qquad a_i, b_i, c_i \in R.$

$f_3\ (x, y, z) = c_1 x + c_2 y + c_3 z$

வரையறையின்படி,

$$f_i\ (x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\therefore\ f_1(x_1) = 1,\ f_1(x_2) = 0,\ f_1(x_3) = 0$$
$$f_2(x_1) = 0,\ f_2(x_2) = 1,\ f_2(x_3) = 0$$
$$f_3(x_1) = 0,\ f_3(x_2) = 0,\ f_3(x_3) = 1$$
$$1 = f_1(x_1) = f_1(1,-1,+3) = a_1 - a_2 + 3a_3$$
$$0 = f_1(x_2) = f_1(0,1,-1) = a_2 - a_3$$
$$0 = f_1(x_3) = f_1(0\ 3,-2) = 3a_2 - 2a_3$$

(அ-து) $a_1 - a_2 + 3a_3 = 1$

$a_2 - a_3 = 0$

$3a_2 - 2a_3 = 0$

எனவே, $a_1 = 1,\ a_2 = o,\ a_3 = 1.$

அடுத்து,

$$o = f_2(x_1) = f_2(1,-1,3) = b_1 - b_2 + 3b_3$$
$$1 = f_2(x_2) = f_2(0,1,-1) = b_2 - b_3$$
$$0 = f_2(x_3) = f_2(0,3,-2) = 3b_2 - 2b_3$$

$\therefore$ $b_1 - b_2 + 3b_3 = 0$

$b_2 - b_3 = 1$

$3b_2 - 2b_3 = 0$

$\therefore$ $b_1 = 7,\ b_2 = -2,\ b_3 = -3.$

மீண்டும்,

$$0 = f_3(x_1) = f_3(1,-1,3) = c_1 - c_2 + 3c_3$$
$$0 = f_3(x_2) = f_3(0,1,-1) = c_2 - c_3$$
$$1 = f_3(x_3) = f_3(0,3,-2) = 3c_2 - 2c_3$$

(அ-து) $c_1 - c_2 + 3c_3 = 0$

$$c_2 - c_3 = 0$$

$$3c_2 - 2c_3 = 1$$

$$\therefore \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1$$

$$\therefore \quad f_1(x, y, z) = a_1 x + a_2 y + a_3 z = x$$

$$f_2(x, y, z) = b_1 x + b_2 y + b_3 z = 7x - 2y - 3z$$

$$f_3(x, y, z) = c_1 x + c_2 y + c_3 z = -2x + y + z$$

எனவே,

$B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$. ஆகும்.

f_1, f_2, f_3 என்பது மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு இருக்கும்.

5-40. இரண்டாவது துணை அடிப்படைக் கணம் (Second dual basis)

ஒவ்வொரு வெக்டர் வெளி V-க்கும் ஒரு துணை வெளி V^* உண்டு. எனவே, V^* என்ற துணை வெளிக்கும் ஒரு துணை வெளி இருக்கும். இது V-ன் இரண்டாவது துணை வெளி (Second dual basis) எனப்படும். இது V^{**} எனக் குறியிடப்படும்.

5-41. தேற்றம்

$V(F)$ ஒரு n பரிமாண வெக்டர் வெளி எனின், $x \in V$ என்ற எந்த ஒரு பூச்சியமில் வெக்டருக்கும் V^*-ல் f என்ற ஒருபடிச்சார்பு $f(x) \neq o$ என்றவாறு உண்டு.

நிரூபணம்

V-ன் அடிப்படை

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்க.

B-ன் துணை அடிப்படை

$B^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ என்போம்.

$$f_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad \forall f_j \in B^*, x_i \in B.$$

$$x = \Sigma a_i x_i, \quad x \neq o \in V, \quad a_i \in F.$$

$$\therefore \quad f_j(x) = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left[f_j(x_i)\right]$$

$$= \sum_{1}^{n} a_i \, \delta_{ij}$$

$$= a_j$$

$\therefore \; f(x) = o, \; \forall f \in V^*$ எனின்,

$f_j(x) = o$

$\Rightarrow \; a_j = o, \; j = 1, 2, \ldots, n$

$\Rightarrow \; x = \Sigma \, a_i x_i = o$

இது $x \neq o$ என்ற நற்கோளுக்கு எதிர் மறையாகும்.

எனவே, $x \neq o$ எனின், $f \in V^*$ எனும் குறைந்தது ஒருபடிச் சார்புக்காவது $f(x) \neq o$.

5-42. தேற்றம்

$\bar{x}$ என்பது V^* மீது $\bar{x}(f) = f(x), \; f \in V^*$ என்றவாறு வரையறுக்கப்பட்ட ஒருபடிச் சார்பு என்க.

பின், $x \rightarrow \bar{x}$, $x \in V$ என்ற V-லிருந்து V^{**}-க்கான உருவமாற்றம் (mapping) ஒற்றுருவு மாற்றம் (Isomorphism) ஆகும்.

நிரூபணம்

$x \in V, \; f \in V^*, \; \bar{x} \in V^{**}$

மேலும், $f(x) \in F, \; \bar{x}(f) \in F.$

$\bar{x}$ ஒருபடிச் சார்பாகும்.

$f_1, f_2 \in V^*$ எனவும், $a, b \in F$ எனவும் இருப்பின்,

$$\begin{aligned} \bar{x}[af_1 + bf_2] &= [af_1 + bf_2](x) \\ &= (af_1)(x) + (bf_2)(x) \\ &= af_1(x) + bf_2(x) \\ &= a\,\bar{x}(f_1) + b\bar{x}(f_2) \end{aligned}$$

(அ-து) $\bar{x}[af_1 + bf_2] = a\bar{x}(f_1) + b\bar{x}(f_2)$.

$\therefore$ $\bar{x}$ ஒருபடிச் சார்பு (Linear functional) ஆகும்.

இனி $x \rightarrow \bar{x}$ என்ற $V \rightarrow V^{**}$ உருவ மாற்றம் ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுவோம்.

$f \in V^*$ என்ற ஒவ்வொரு சார்புக்கும்

$$\begin{aligned}\overline{(ax + by)}\,(f) &= f\,(ax + by)\\ &= a f\,(x) + b\, f\,(y)\\ &= a\,\bar{x}\,(f) + b\,\bar{y}\,(f)\\ &= (a\bar{x})\,(f) + (b\bar{y})\,(f)\\ &= (a\bar{x} + b\bar{y})\,(f)\end{aligned}$$

(அ-து) $\overline{ax + by} = a\bar{x} + b\bar{y}$

$\therefore$ $x \to \bar{x}$ ஒருபடி நிலைமாற்றமாகும்.

மேலும் $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x}\,(f) = \bar{y}\,(f)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f\,(x) = f\,(y)\\ &\Rightarrow f\,(x-y) = o\,, \quad \forall\, f \in V^*\end{aligned}$$

$\therefore$ $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y = o \Rightarrow x = y$

$\therefore$ $x \to \bar{x}$ என்பது ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றமாம்.

V, V^{**} ஆகிய இரண்டு வெளிகளும் ஒரே பரிமாணமுடையவை. மேலும், $x \to \bar{x}$ என்பது V-ல் உள்ள வெவ்வேறு மூலகங்களை வெவ்வேறாக இருக்குமாறு $V \to V^{**}$-க்கு உருமாற்றம் செய்யும் ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

எனவே, $x \to \bar{x}$ என்ற $V \to V^{**}$ உருமாற்றம் ஒற்றுருவு மாற்றமாகும்.

இது இயற்கை ஒற்றுருவு மாற்றம் (natural isomorphism) எனப்படும்.

மாதிரி–4

f என்பது, ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி $V\,(F)$-ல் ஒருபடிச் சார்பு (Linear functional) எனின், $f\,(x) = 0$, $x \in V$ என்றவாறுள்ள அனைத்து வெக்டர்களது கணம் V-ன் உள்வெளியாகும். அதன் பரிமாணம் காண்க.

நிரூபணம்

$N = \{\, x \in V:\ f\,(x) = o \,\}$ என்க.

$f\,(o) = o \quad \therefore\ o \in N.$

எனவே, N ஒரு வெறுமையற்ற (non-empty) கணமாம்.

N என்பது ஒருபடிச் சார்புகளது பூச்சிய வெளி. மேலும், N ஓர் உள் வெளியாகும்.

மேலும்,

V-ன் பரிமாணம் $=$ f-ன் வீச்செல்லையின் பரிமாணம்
$+$ f-ன் பூச்சிய வெளியின் பரிமாணம்.

f பூச்சிய சார்பெனின்,

$$f(x) = o, \quad \forall\, x \in V.$$

$\therefore$ N என்பது V என்ற முழு வெளியாகும்.

$\therefore$ பரிமாணம் N $=$ பரிமாணம் V
$= n$ என்க.

மேலும், f-ன் வீச்செல்லை F களத்தின் பூச்சியத்தைக் கொண்டிருக்கும்.

$\therefore$ பரிமாணம் (f-ன் வீச்செல்லை) $= o$

$\therefore$ பரிமாணம் $V = O +$ பரிமாணம் (f-ன் பூச்சியவெளி)

$\therefore$ $n =$ பரிமாணம் N.

f பூச்சிய சார்பல்லவெனின், f-ன் வீச்செல்லை களம் F ஆகும்.

$\therefore$ பரிமாணம் (f-ன் வீச்செல்லை) $= 1$

$\therefore$ பரிமாணம் $V =$ பரிமாணம் (f-ன் வீச்செல்லை)
$+$ பரிமாணம் (f-ன் பூச்சிய வெளி)

$n = 1 +$ f-ன் பூச்சிய வெளியின் பரிமாணம்

$\therefore$ f-ன் பூச்சிய வெளியின் பரிமாணம் $= (n-1)$

5-43. பூச்சியமாக்கிகள் (annihilators)

$V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியின் உட்கணம் S என்க. பின், S-ல் உள்ள எந்த ஒரு மூலகத்தையும் F-ல் உள்ள பூச்சியத்திற்கு உருமாற்றம் செய்யும் V-ன் மீதமைந்த அனைத்து ஒருபடிச் சார்புகளது கணம் S கணத்தின் பூச்சியமாக்கி (annihilator) எனப்படும். இது S° என்க.

$$S^\circ = \{f : f(x) = o \quad \forall\, x \in S,\ f \in V^*\} \subset V^*.$$

5-44. தேற்றம்

$V(F)$ வெக்டர் வெளியின் உட்கணம் S என்க. S கணத்தின் பூச்சியமாக்கியான S° என்ற கணம் V^* என்ற வெக்டர் துணை வெளியின் (dual space) உள் வெளி என நிறுவுக.

நிரூபணம்

பூச்சியமாக்கியின் வரையறைப்படி,

$O \in S^o$,

$f_1, f_2 \in S^o$; $a, b \in F$ எனின்,

$f_1(x) = 0, \ f_2(x) = 0, \ \forall x \in S$

$$\begin{aligned} \therefore \quad (af_1 + bf_2)(x) &= (af_1)(x) + (bf_2)(x) \\ &= af_1(x) + bf_2(x) \\ &= a.0 + b.0 \\ &= o \end{aligned}$$

$\therefore \quad af_1 + bf_2 \in S^o$

எனவே, S^o என்பது V^*-ன் உள்வெளியாம்.

5–45. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற n பரிமாண வெக்டர் வெளியின் உள்வெளி S என்க. S-ன் பரிமாணம் m எனின், S-ன் பூச்சியமாக்கியான S^o-ன் பரிமாணம் $(n-m)$ ஆகும்.

(அ-து) பரிமாணம் (S) + பரிமாணம் (S^o) = பரிமாணம் (V)

நிரூபணம்

S-ன் பரிமாணம் m ஆதலின்,

$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ என்பதை S-ன் அடிப்படையாகக் கொள்வோம்.

பின் B_1 கணத்தை V-ன் அடிப்படைக் கணமாக அமையுமாறு

$B_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$

என்று விரிவாக்கலாம்.

அடுத்து V^* என்ற V-ன் துணை வெளியின் B_3 (என்க) n பரிமாணமுடையதாதலின், அது n ஒருபடிச் சார்புகள் கொண்டிருக்கும்.

$\therefore \quad B_3 = \{f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n\}$

இனி S^o-ன் பரிமாணம் $(n-m)$ என நிறுவுவோம்.

(அ-து) $B_4 = \{f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n)$ என்ற ஒருபடிச் சார்புகளது கணம் S^o-ன் அடிப்படைக் கணம் என நிறுவுவோம்.

B_4 என்பது B_3-ன் உட்கணம். மேலும், B_3 என்பது V^* வெளியின் அடிப்படைக் கணமாம். எனவே, B_4 ஒருபடி சார்பற்றவை (linearly independant).

மீண்டும்,

$$x \in S \Rightarrow x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \qquad (B_1 \text{ ஆனது } S\text{-ன் அடிப்படை})$$

$$\therefore \; f_i(x) = f_i \, \Sigma \, a_j x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j f_i(x_j), \quad i = m+1, m+2, \ldots, n$$

$$= o$$

[$\because$ $j = 1, 2, \ldots, m$; $i = m+1, m+2, \ldots, n$. எனவே, $i \neq j$. எனவே, மேலுள்ள கூட்டுத் தொகையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூச்சியமாகும்].

(அ-து) $f_i(x) = o \quad \forall \; x \in S, i = m+1, m+2, \ldots, n$.

அடுத்தபடியாக, $L(B_4) = S^\circ$ என நிறுவுவோம். $f \in V^*$ என்பது V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்பு (linear functional) என்க. B_3 என்பது V^*-ன் அடிப்படையாதலின்,

$$f = b_1 f_1 + b_2 f_2 + \ldots + b_n f_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i f_i, \quad b_i \in F.$$

$$\therefore \; f(x_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(x_j)$$

$$= \Sigma \, b_i \, \delta_{ij} \qquad (\because \; f_i(x_j) = \delta_{ij})$$
$$= b_j.1 = b_j$$

(அ-து) $f(x_j) = b_j$

$$\therefore \; f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i \qquad [\because \; b_i = f(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x_i) f_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(x_i) f_i$$

ஆனால், $f \in S^\circ$ எனின் $f(x) = o, \ \forall\ x \in S.$

(அ-து) $f(x_1) = o, \ f(x_2) = o, \ldots, f(x_m) = o.$

(அ-து) $f(x_i) = o, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

$$\therefore \quad f = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) f_j + \sum_{i=m+1}^{n} f(x_i) f_i$$

$$= \quad o + \sum_{i=m+1}^{n} f(x_i) f_i$$

$$= f(x_{m+1})\ f_{m+1} + \ldots + f(x_n) f_n$$

$= B_4$-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை.

$\therefore \quad f \in S^\circ \Rightarrow f \in L(B_4)$

எனவே, $S^\circ \subset L(B_4)$.

மீண்டும்,

$$f \in L(B_4) \Rightarrow f = \sum_{j=m+1}^{n} b_i f_i$$

$$x \in S \text{ எனின், } x = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$$

$$\therefore \quad f_i(x) = f_i \sum_{j=1}^{m} a_j x_j, \quad i = m+1, \ldots, n.$$

$$= o$$

[$\because \quad j = 1, 2, \ldots, m; \ i = m+1, \ldots, n. \quad \therefore \quad i \neq j.$

எனவே, ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூச்சியமாம்].

$\therefore \quad f \in L(B_4) \Rightarrow f \in S^\circ.$

$\therefore \quad L(B_4) \subset S_o.$

எனவே, $S_o = L(B_4)$

(அ-து) S°-ன் அடிப்படைக் கணம் B_4 ஆகும்.

$\therefore \quad S^\circ$-ன் பரிமாணம் $= n - m$

$= (V$-ன் பரிமாணம்$) - (S$-ன் பரிமாணம்$)$

(அ-து) $(S$-ன் பரிமாணம்$) + (S^\circ$-ன் பரிமாணம்$)$

$= (V$-ன் பரிமாணம்$)$

5-46. தேற்றம்

V வெளியின் உள்வெளிகள் W_1, W_2 எனின்,

(i) $W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1^{\circ} = W_2^{\circ}$

(ii) $W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_2^{\circ} \subset W_1^{\circ}$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i) $W_1 = W_2$ என்க.

இரு கணங்கள் சர்வசமமெனின், அவற்றின் பூச்சியமாக்கிகளும் (annihilators) சர்வசமமாகும்.

$$\therefore \quad W_1^{\circ} = W_2^{\circ}.$$

மறுதலையாக, $W_1^{\circ} = W_2^{\circ}$ என்க.

$(W_1^{\circ}) = (W_2^{\circ})$ ஆதலின்,

$(W_1^{\circ})^{\circ} = (W_2^{\circ})^{\circ}$ என்றாகும்.

(அ-து) $W_1^{\circ\circ} = W_2^{\circ\circ}$

$W_1^{\circ\circ}$, $W_2^{\circ\circ}$ ஆகிய இரண்டும் V^{**}-ன் உள்வெளிகள். மேலும், V^{**}-ன் மூலகங்கள் V^*-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்புகளாம். மீண்டும் $x \to \bar{x}$ என்பது $V \simeq V^{**}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad W_1^{\circ\circ} = W_2^{\circ\circ}$$
$$\Rightarrow \bar{x}(W_1) = \bar{x}(W_2)$$
$$\Rightarrow W_1 = W_2.$$

(ii) $W_1 \subset W_2$ என்க.

$f \in W_2^{\circ}$ எனின், $f(x) = O \quad \forall\, x \in W_2$

$f(x) = O \quad \forall\, x \in W_1 \quad [\because W_1 \subset W_2]$

$$\therefore \quad f \in W_1^{\circ}$$

(அ-து) $f \in W_2^{\circ} \Rightarrow f \in W_1^{\circ}$

$$\therefore \quad W_2^{\circ} \subset W_1^{\circ}.$$

5-47. தேற்றம்

V என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகள் W_1, W_2, $V = W_1 \oplus W_2$ எனின்,

(i) $W_1^* \simeq W_2^\circ$

(ii) $W_2^* \simeq W_1^\circ$

(iii) $V^* = W_1^\circ \oplus W_2^\circ$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$V = W_1 \oplus W_2$$

$\therefore \quad z = x + y, \quad z \in V, \quad x \in W_1, \quad y \in W_2.$

மேலும், $W_1 \cap W_2 = \{o\}$

W_1-ன் பரிமாணம் + W_2-ன் பரிமாணம் = V-ன் பரிமாணம்.

(i) $W_1^* \simeq W_2^\circ$.

பரிமாணம் $V = n$, பரிமாணம் $W_1 = m$ என்க.

$\therefore$ பரிமாணம் $W_2 = n - m$

பரிமாணம் W_1 = பரிமாணம் W_1^* ஆதலின்,

பரிமாணம் $W_1^* = m$ ஆகும்.

பரிமாணம் W_2° + பரிமாணம் W_2 = பரிமாணம் V ஆதலின்,

பரிமாணம் W_2° = பரிமாணம் V − பரிமாணம் W_2

$= n - (n - m)$

$= m$

= பரிமாணம் W_1

= பரிமாணம் W_1^* [$\because$ W_1-ன் பரிமாணம் = W_1^*-ன் பரிமாணம்]

(அ-து) பரிமாணம் W_1^* = பரிமாணம் W_2°

$\therefore \quad W_1^* \simeq W_2^\circ.$

(ii) $W_2^* \simeq W_1^\circ$

பரிமாணம் W_2^* = பரிமாணம் W_2

$= n - m$

= பரிமாணம் V − பரிமாணம் W_1

= பரிமாணம் W_1°

($\because$ பரிமாணம் W_1 + பரிமாணம் W_1° = பரிமாணம் V)

(அ-து) பரிமாணம் W_2^* = பரிமாணம் W_1°.

$\therefore \quad W_2^* \simeq W_1^\circ.$

(iii) $V^* = W_1^{\circ} \oplus W_2^{\circ}$.

V^*-ன் மூலங்கள் V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்புகள். மேலும், W_1°-ன் மூலகங்களும் V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச் சார்புகளாகும் (Linear functionals).

$f \in W_1^{\circ} \cap W_2^{\circ}$ என்க.

$\therefore \; f \in W_1^{\circ} \, , \; f \in W_2^{\circ}$

எனவே, $f(x) = O, \;\; \forall\, x \in W_1$

$f(y) = O, \;\; \forall\, y \in W_2$.

$z \in V$ எனில், $f(z) = f(x+y) \quad (\because z = x+y, x \in W_1, y \in W_2 ; \; \because \; V = W_1 \oplus W_2)$

$$= f(x) + f(y)$$
$$= O + O$$
$$= O$$

$\therefore$ f என்பது பூச்சியச் சார்பு ஆகும் (Zero functional)

எனவே, $W_1^{\circ} \cap W_2^{\circ} = \{O\}$.

அடுத்தபடியாக,

$z = x + y, \;\; z \in V, \;\; x \in W_1, \;\; y \in W_2$ என்க.

இனி, $f_1(z) = f(y)$

$f_2(z) = f(x) \qquad \forall\, f \in V^*$

என்ற முறையில் f_1, f_2 என்ற இரு ஒருபடிச் சார்புகளை வரையறுப்போம்.

$x = x + O\, , \;\; \forall\, x \in W_1$

$\therefore \; f_1(x) = f_1(x+o)$

$= f(o) \qquad (f_1$-ன் வரையறை)

$= O$

$\therefore \; f_1 \in W_1^{\circ} \qquad (\because \; f_1(x) = o \;\; \forall\, x \in W_1]$.

மீண்டும், $y = o + y, \qquad y \in W_2$

$\therefore \; f_2(y) = f_2(o+y)$

$= f(o) \qquad [f_2$-ன் வரையறை]

$= o$

$f_2(y) = o \;\; \forall\, y \in W_2$.

$\therefore \; f_2 \in W_2^{\circ}$.

எனவே, $f_1 \in W_1^{\circ}$, $f_2 \in W_2^{\circ}$

இனி, f_1, f_2 என்பவை ஒருபடிச் சார்புகள் என நிறுவுவோம்.

$z_1, z_2 \in V$ என்க, $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$,

$x_1, x_2 \in W_1$, $y_1, y_2 \in W_2$

$$\therefore \quad az_1 + bz_2 = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2)$$
$$= (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)$$

$x_1, x_2 \in W_1 \quad \therefore \quad ax_1 + bx_2 \in W_1$

$y_1, y_2 \in W_2 \quad \therefore \quad ay_1 + by_2 \in W_2, \quad a, b \in F.$

$\therefore \quad f_1(az_1 - bz_2) = f_1[(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)]$

$= f[ay_1 + by_2]$, [f_1-ன் வரையறைப்படி]

$= af(y_1) + bf(y_2)$

$= af_1(z_1) + bf_1(z_2)$, [f_1-ன் வரையறைப்படி]

(அ-து) $f_1(az_1 + bz_2) = af_1(z_1) + bf_1(z_2)$.

$\therefore \quad f_1 \in W_1^{\circ}$ என்பது ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

இவ்வாறே,

$f_2(az_1 + bz_2) = f_2[(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)]$

$= f(ax_1 + bx_2)$, [f_2-ன் வரையறைப்படி]

$= af(x_1) + bf(x_2)$

$= af_2(z_1) + bf_2(z_2)$, (f_2-ன் வரையறைப்படி)

$\therefore \quad f_2(az_1 + bz_2) = af_2(z_1) + bf_2(z_2)$.

எனவே, $f_2 \in W_2^{\circ}$ என்பதும் ஒருபடிச் சார்பு ஆகும்.

அடுத்து, $f = f_1 + f_2$ என நிறுவுவோம்.

$z \in V$ என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும்,

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)z &= f_1(z) + f_2(z)\\ &= f(y) + f(x)\\ &= f(x) + f(y)\\ &= f(x + y)\\ &= f(z), \quad \forall z \in V.\end{aligned}$$

$\therefore \quad f = f_1 + f_2 , \quad f_1 \in W_1^\circ$
$\qquad\qquad\qquad\qquad f_2 \in W_2^\circ$

எனவே, $V^* = W_1^\circ + W_2^\circ$.

மேலும், $W_1^\circ \cap W_2^\circ = \{o\}$

$\therefore \quad V^* = W_1^\circ \oplus W_2^\circ$.

பயிற்சி 5–3

1. $V_3(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் அடிப்படை
$B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ எனின், B-ன் துணை அடிப்படைக் கணம் B^*-ஐக் காண்க.

[விடை: $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$

$f_1(x, y, z) = x, \; f_2(x, y, z) = y, \; f_3(x, y, z) = z$]

2. $V_3(R)$-ன் அடிப்படைக் கணம்

$$B = \{ (1,-2, 3), \; (1,-1, 1), \; (2,-4, 7) \}$$

எனின், B-ன் துணை அடிப்படைக் கணம் B^* காண்க.

[விடை: $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$

$f_1(x, y, z) = -3x-5y-2z, \; f_2(x, y, z) = 2x + y,$

$f_3(x, y, z) = (x + 2y + z)$]

3. W என்பது $V(F)$ வெக்டர் வெளியின் உட்கணம் எனின், $W^\circ = [L(W)]^\circ$, $W^{\circ\circ} = L(W)$ என நிறுவுக.

4. $V_2(R)$ வெக்டர் வெளி மீது f என்ற ஒருபடிச் சார்பு $f[(2, 1)] = 15, \; f[(1,-2)] = -10$ எனின், $f(x, y)$-ஐக் காண்க.

[விடை: $f(x, y) = 4x + 7y$]

5. $B = \{ 1,-1, 3), \; (0, 1,-1), \; (0, 3,-2) \}$ என்பது மெய்யெண்களது களம் R-ன் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(R)$-ன் அடிப்படைக் கணமெனின், B-ன் துணை அடிப்படைக் கணம் (Dual basis of B) காண்க.

[விடை: $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$

$f_1(x, y, z) = x, \; f_2(x, y, z) = 7x-2y-3z,$

$f_3(x, y, z) = -2x + y + z$]

6. W_1, W_2 என்பவை $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள் வெளிகளெனின்,

(i) $(W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ$

(ii) $(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ$

என நிறுவுக.

7. $(1, 2, -3, 4)$, $(0, 1, 4, -1)$ என்ற வெக்டர்களால் பிறப்பிக்கப்படும் $V_4(R)$-ன் உள்வெளி W எனின், W-ன் பூச்சியமாக்கியின் (annihilator) அடிப்படையைக் காண்க.

[விடை: $\{f_1, f_2\}$,

$$f_1(x, y, z, t) = 11x - 4y + z$$
$$f_2(x, y, z, t) = 6x - y - t$$]

6. அணிகளும் ஒருபடி நிலைமாற்றங்களும்

(Matrices and linear transformations)

6–1. நிலைமாற்றங்களை விளக்கும் அணிகள்

(1) ஒருபடி நிலைமாற்றத்தை விளக்கும் அணி

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் ஒரு வரிசைப்பட்ட அடிப்படை (ordered basis of V (F))

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்க.

எனவே, V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் B-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

$W(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் ஒரு வரிசைப்பட்ட அடிப்படைக் கணம்.

$B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ எனின்,

W-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் B_1-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

$T: V \to W$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க.

$\therefore$ $x \in V$ எனின், $T(x) \in W$.

$T(x)$ என்ற ஒவ்வொன்றும் B_1-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்,

(அ-து)
$$\begin{aligned} T(x_1) &= a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \\ T(x_2) &= a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ T(x_n) &= a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \end{aligned}$$

$$\therefore \quad T(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

மேற்குறிப்பிட்ட கோவைகளது கெழு அணி (Coefficient matrix)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்றாகும்.

பின், $T: V \rightarrow W$ என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் B, B_1 என்ற அடிப்படைகளைச் சார்ந்த அணி, மேற்குறிப்பிட்ட அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணியாகும்.

(அ-து) T-ன் அணி,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இந்த அணி $[T]^{B_1}_{B}$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

(2) ஒருபடி செயலியை விளக்கும் அணி

T ஒருபடிச் செயலி (அ-து) $T: V \rightarrow V$ எனின், $m = n$. எனவே, T-ன் அணி $n \times n$ அணியாகும்.

$$\therefore \quad T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

எனவே, B என்ற வரிசைப்பட்ட அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணி $[T]_B$ என்று குறியீடு செய்யப்பட்டு

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

என விளக்கப்படும்.

6-2. கூறுவெக்டர் (co-ordinate vector)

F களத்தின் மீது அமைந்த $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் ஒரு வரிசைப்பட்ட அடிப்படை

$B = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ எனின்,

$x \in V$ என்ற யாதாமொரு வெக்டர்

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

என்று விவரிக்கப்படும்.

இது அணி குறியீட்டில், $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}$

என்ற நிரல் வெக்டராக விளக்கப்படும்.

பின், $a_1, a_2, \ldots, a_n$ எனற திசையிலிகள் B என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்த x-ன் கூறுகள் எனப்படும். இது $[x]_B$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

$$(\text{அ-து}) \quad [x]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}$$

6–3. தேற்றம்

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது $V(F)$ என்ற F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளியின் ஓர் அடிப்படை, T-ஒருபடிச் செயலி எனின், $x \in V$ என்ற யாதாமொரு வெக்டருக்கு,

$$[T]_B \; [x]_B = [T(x)]_B$$

என்றாகும்.

நிரூபணம்

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

$$= a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{nj} x_n \quad \text{என்க.}$$

வலப்பக்கத்திலுள்ள $a_{1j}, x_{2j}, \ldots, a_{nj}$ என்ற கெழுக்கள் $[T]_B$ என்ற அணியினது j-வது நிரலாகும்.

$$x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots, + b_n x_n \text{ எனின்,}$$

$$[x]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ என்றாகும்.}$$

இப்பொழுது,

$$\begin{aligned}
T(x) &= T\ (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n) \\
&= T \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_i b_i T(x_i) \\
&= \sum_i b_i \sum_j a_{ji} x_j \qquad (\because\ T(x_j) = \Sigma\, a_{ij} x_i) \\
&= \sum_j (\Sigma\, a_{ji} b_i)\, x_j\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad j = 1, 2, \ldots, n. \\
&= (\Sigma\, a_{1i} b_i)\, x_1 + (\Sigma\, a_{2i} b_i)\, x_2 + \ldots + (\Sigma\, a_{ni} b_i)\, x_n.
\end{aligned}$$

எனவே, $[T(x)]_B$ என்பது கெழு அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணியாகும்.

$$\therefore\quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} \Sigma\, a_{1i}\, b_i \\ \Sigma\, a_{2i}\, b_i \\ \ldots \\ \ldots \\ \Sigma\, a_{ni}\, b_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \ldots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \ldots + a_{2n} b_n \\ \ldots \qquad \ldots \\ \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1} b_1 + a_{n2} b_2 + \ldots + a_{nn} b_n \end{bmatrix}$$

$$[T]_B\, [x]_B = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} b_1 + a_{n2} b_2 + \dots + a_{nn} b_n \end{bmatrix}$$

$$= [T(x)]_B$$

எனவே, $[T]_B \; [x]_B = [T(x)]_B.$

பின், $AB = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k]$ ஒரு $m \times p$ அணியாகும்.

(அ-து) AB-ன் $(i-j)$-வது மூலகம் A-ன் i-வது நிரை B-ன் j-வது நிரல் ஆகியவற்றின் உட்பெருக்கத்தின் கூட்டுத் தொகையாம்.

6-4. தேற்றம்

$V(F)$ வெளி மீதமைந்த T_1, T_2 என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றங்களது $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ என்ற நிலைத்த அடிப்படைக் கணத்தைச் சார்ந்த அணிகள் $[T_1]$, $[T_2]$ எனின், அதே அடிப்படையைச் சார்ந்து $T_1 + T_2$, KT_1, $T_1 T_2$ என்ற செயலிகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

(i) $[T_1 + T_2] = [T_1] + [T_2]$

(ii) $[K T_1] = K [T_1]$

(iii) $[T_1 T_2] = [T_1] [T_2]$

நிரூபணம்

$[T_1] = [a_{ij}]$, $[T_2] = [b_{ij}]$ என்க.

T_1, T_2 என்பவை ஒருபடிச் செயலிகளாதலின், இரண்டும் $n \times n$ அணிகளாகும்.

$$\therefore \quad T_1(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \quad T_2(x_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i$$

$$\forall \, i = 1, 2, \dots, n.$$

(i) $[\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2] = [\mathbf{T}_1] + [\mathbf{T}_2]$

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x_j) &= T_1(x_j) + T_2(x_j) \\ &= \Sigma \, a_{ij} x_i + \Sigma \, b_{ij} x_i \\ &= \Sigma \, (a_{ij} + b_{ij}) x_i \\ &= \Sigma \, c_{ij} x_i \end{aligned}$$

$$\therefore \quad [T_1 + T_2] = [c_{ij}]$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$
$$= [T_1] + [T_2].$$

(ii) $[\mathbf{K\,T_1}] = [\mathbf{K\,T_1}]$

$$(K\,T_1)(x_j) = K\,T_1(x_j)$$

$$= K \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (K\, a_{ij})\; x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_{ij})\, x_i$$

$$\therefore \quad [K\,T_1] = [c_{ij}]$$
$$= [K\, a_{ij}] = K[T_1]$$

(iii) $[\mathbf{T_1\,T_2}] = [\mathbf{T_1}]\,[\mathbf{T_2}]$

$$(T_1\,T_2)(x_j) = T_1\{T_2(x_j)\}$$

$$= T_1 \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, x_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, T_1(x_k) \quad (\because \; T_1 \text{ ஒருபடிச் செயலி})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\; x_i \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \right) x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_{ij}\, x_i)$$

$$\therefore \quad [T_1\, T_2] = [c_{ij}]$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\;\; b_{kj} \right]$$
$$= [a_{ij}]\,[b_{ij}] = [T_1]\,[T_2].$$

6-5. தேற்றம்

U, V, W என்பவை முறையே m, n, p பரிமாணங்கள் கொண்ட முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளிகள்; அவற்றின் அடிப்படைகள் முறையே B_1, B_2, B_3 என்க.

$$T_1 : U \to V,\ T_2 : V \to W,\ T_2 T_1 : U \to W$$

என்பவை ஒருபடி நிலை மாற்றங்களெனின்,

$$[T_2 T_1]_{B_1}^{B_3} = [T_2]_{B_2}^{B_3} [T_1]_{B_1}^{B_2}$$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$
$$B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$
$$B_3 = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\},\quad \text{என்க.}$$

$$\therefore\ [T_1]_{B_1}^{B_2} = [a_{ij}]_{m\times n},\ [T_2]_{B_2}^{B_3} = [b_{ki}]_{p\times m}$$

$$[T_2 T_1]_{B_1}^{B_3} = [c_{kj}]_{p\times n}$$

மேலும், $T_1(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n.$ —(1)

$$T_2(y_i) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} z_k,\quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad \text{—(2)}$$

$$T_2 T_1(x_j) = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} z_k,\quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad \text{—(3)}$$

$$T_2 T_1(x_j) = T_2\{T_1(x_j)\}$$

$$= T_2\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right] \quad (\because \text{(1)-ன் படி})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T_2(y_i) \quad (\because T_2 \text{ ஒருபடி நிலைமாற்றம்})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} z_k\right) \quad (\because \text{(2)-ன் படி})$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) z_k \quad \text{—(4)}$$

(3), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \; K = 1, \ldots, p.$$

$$\therefore \quad [c_{kj}]_{p\times n} = \left[\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ij} \right]_{p\times n}$$

$$= [b_{ki}]_{p\times m} \, [a_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{(அணிகளது பெருக்கல் வரையறை)}$$

எனவே, $[T_2 T_1]_{B_1}^{B_2} = [T_2]_{B_2}^{B_3} [T_1]_{B_1}^{B_2}$

6–6. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த இருவெக்டர் வெளிகள் $U(F)$, $V(F)$ என்க. அவை முடிவுள்ள பரிமாண வெளிகள் எனவும், அவற்றின் அடிப்படைகள் முறையே

$$B_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$
$$B_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m \}$$

எனவும் கொள்க. $W(F)$ என்பது அனைத்து $m \times n$ அணிகளைக் கொண்ட வெக்டர் வெளி என்போம். பின், $T: U \to V$ என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்திற்கு B_1, B_2-ஐச் சார்ந்த அணியினை அளிக்கும் சார்பு $L(U, V)$ என்ற வெக்டர் வெளியிலிருந்து $W(F)$ என்ற வெக்டர் வெளிக்கு ஒற்றுருவு ஆகும்.

நிரூபணம்

T என்பது $L(U, V)$-ஐச் சேர்ந்த யாதாமொரு ஒருபடி நிலை மாற்றம் என்க. $[a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது B_1, B_2 என்ற அடிப்படைகளைச் சார்ந்த T-ன் அணி என்போம்.

$f: L(U, V) \to W$ என்று ஒரு சார்பை

$$f(T_1) = [T_1]_{B_1}^{B_2} = [a_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{—(1)}$$

$$f(T_2) = [T_2]_{B_1}^{B_2} = [b_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{—(2)}$$

என்ற முறையில் வரையறுப்போம்.

இனி f ஒரு ஒற்றுருவு என நிறுவுவோம். அதாவது, f ஒன்றுக் கொன்றான மேல் ஒருபடி நிலை மாற்றம் என நிறுவுவோம்.

f ஒன்றுக் கொன்றுனது

$$f(T_1) = f(T_2) \Rightarrow [a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{n\times n}$$

$$\Rightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, y_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow T_1(x_j) = T_2(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2$$

(அ-து) $f(T_1) = f(T_2) \Rightarrow T_1 = T_2$.

$\therefore$ f ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம்.

f மேல் உருமாற்றம்

$[c_{ij}] \in W$ ஒரு $m \times n$ அணி என்க. பின், இவ்வணிக்கு ஒத்த $T: U \to V$ என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, y_i, \quad j = 1, \ldots, n$$

என்றவாறு இருக்கும்.

எனவே, $[T]_{B_1}^{B_2} = [c_{ij}]_{m\times n}$ ஆகும்.

அதாவது, $f(T) = [c_{ij}]_{m\times n}$

எனவே, f ஒரு மேல் உருமாற்றம்.

f ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$$f(T_1 + T_2) = [T_1 + T_2]_{B_1}^{B_2}$$

$$= [T_1]_{B_1}^{B_2} + [T_2]_{B_1}^{B_2}$$

$$= f(T_1) + f(T_2) \qquad \text{(4.5 தேற்றப்படி)}$$

$$\therefore \quad f(KT_1) = [KT_2]_{B_1}^{B_2}$$

$$= K[T_1]_{B_1}^{B_2} = Kf(T_1)$$

எனவே, T ஒருபடி நிலைமாற்றம்.

$\therefore$ f ஒரு ஒற்றுருவாகும்.

6-7. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(F)$ என்க.

$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற அடிப்படைக் கணத்தைச் சார்ந்த சர்வ சம செயலி I, பூச்சிய செயலி $\hat{O}$ ஆகியவற்றின் அணிகள் முறையே அலகு அணி (unit matrix), பூச்சிய அணி (zero matrix) யாகும்.

நிரூபணம்

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

$$I(x_j) = x_j = o.x_1 + o.x_2 + \ldots + 1.x_j + \ldots + o.x_n$$

$$\therefore \quad I(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} x_i$$

$$\therefore \quad I = [\delta_{ij}] \qquad [\because \; \delta_{ij} = 1, \; i = j$$
$$= \text{அலகு அணி} \qquad \qquad = o, \; i \neq j]$$

இவ்வாறே,

$$\hat{o}(x_j) = o = o.x_1 + o.x_2 + \ldots + o.x_n$$

$$\therefore \quad \hat{o}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} o_{ij} x_i$$

எனவே, $[o] = [o_{ij}]$
$=$ பூச்சிய அணி.

6-8. நேர்மாறு செயலியினது அணி

$V(F)$ வெக்டர் மீதமைந்த T என்ற ஒருபடி செயலியின் அடிப்படை B-ஐச் சார்ந்த அணி $[T] = [a_{ij}]$ என்க. பின்,

T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது $\Leftrightarrow$ $[T] = [a_{ij}]$ நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

மேலும், $[T^{-1}] = [T]^{-1} = [a_{ij}]^{-1}$

6-9. அடிப்படை மாற்றம் (Change of basis)

$$B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

என்பவை $V(F)$ வெக்டர் வெளியின் இரு அடிப்படைகள் என்க.

$$\therefore \quad x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$
$$x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ என்பவை B_1, B_2 என்ற அடிப்படைகளைச் சார்ந்த x-ன் கூறுகள் எனப்படும்.

T ஒருபடி நிலைமாற்றம் எனின், $T(x_i)\ y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ என்று நாம் முன்னரே கண்டோம்.

B_1 என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணி $[T]_{B_1}$

$$\therefore \quad [T]_{B_1} = [c_{ij}], \quad T(x_j) = \Sigma\, c_{ij}\, x_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$
$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \in V$$

$$\therefore \quad T(x) = T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)$$
$$= a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) + \dots + a_n T(x_n)$$
$$= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n$$

$T(x) = o$ எனின்,

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = o$$

B_2 ஒருபடிச் சார்பற்றதாதலின்,

$$a_1 = o, \quad a_2 = o, \quad \dots, a_n = o$$

$$\therefore \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = o$$

(அ-து) $x = o$

அதாவது, $T(x) = o$ எனின், $x = o$

எனவே, T நேர்மாறுத் தன்மையுடையது.

6-10. தேற்றம்

$B_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$B_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ என்பவை வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன்

இரு அடிப்படைகள் என்க. V-ல் உள்ள x என்ற ஒரு வெக்டர் B_1, B_2-ஐச் சார்ந்து

$$x = \Sigma\, a_i\, x_i = \Sigma\, b_i\, y_i$$

எனின், கூறுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு

$$a_i = \Sigma\, c_{ij}\, b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

என்றாகும்.

நிரூபணம்

$$\begin{aligned} x &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_n y_n \\ &= b_1 T(x_1) + b_2 T(x_2) + \dots + b_n T(x_n), \quad (\because T(x_i) = y_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j T(x_j) \\ &= \sum_j b_j \sum_i c_{ij} x_i, \quad (4.10\text{-ன் படி}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} c_{ij} b_j \right) x_i \end{aligned}$$

(அ-து) $\Sigma a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j \right) x_i$

$$\therefore \quad a_i = \sum_j c_{ij} b_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$[c_{ij}]$ என்ற அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி B_1-லிருந்து B_2-க்கு மாறும் மாறுபாடு அணி (Transition matrix) எனப்படும்.

6–11. தேற்றம்

$$B_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$
$$B_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad \text{என்ற}$$

அடிப்படைகளைச் சார்ந்து $x, y \in V$ என்ற வெக்டர்கள்

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$
$$y = a_1 y_1' + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n$$

என்று விளக்கப்படுமெனின், x, y என்ற வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு $y = T(x)$ என்றாகும். T என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் அணி, $[T]_{B_1} = [c_{ij}]$ என்க.

நிரூபணம்

$$\begin{aligned} y &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \\ &= a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) + \dots + a_n T(x_n), \\ &\qquad (\because T(x_i) = y_i) \\ &= T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n), \\ &\qquad (\because T \text{ ஒருபடி நிலை மாற்றம்}) \\ &= T(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = T(x).$$

6–12. வடிவொப்புமை (Similarity)

A, B இரு $n \times n$ அணிகள் என்க. $B = \bar{P}' A P$ என்ற முறையில் P என்ற நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒரு $n \times n$ அணி இருப்பின், A, B இரண்டும் வடிவொத்தவை (similar) எனப்படும்.

T_1, T_2 என்பவை $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீதமைந்த இரு ஒருபடிச் செயலிகள் என்க. $T_2 = \bar{T}' \ T_1 \ T$ என்ற முறையில் T என்ற நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒருபடி நிலைமாற்றம் ஒன்று உண்டு எனின், T_1, T_2 இரண்டும் வடிவொத்த ஒருபடிச் செயலிகள் எனப்படும்.

6–13. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீதமைந்த T_1 என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் அணிகள் $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற அடிப்படைகளைச் சார்ந்து முறையே $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ எனின்,

$$[T_1]_{B2} = [\bar{T}]'_{B1} \, [T_1]_{B1} \, [T]_{B1} \ , \ [T]_{B1} = [c_{ij}]$$

என்றாகும்.

நிரூபணம்

$$[T_1]_{B1} = [a_{ij}] \ , \ [T_1]_{B2} = [b_{ij}] \qquad (\text{கொள்கை})$$

$$\therefore \quad T_1(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, x_i \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$T_1(y_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \, y_i \ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore \quad T_1(y_j) = T_1[\,T(x_j)\,] \ , \qquad (\because \ T(x_j) = y_j)$$

$$= T_1 \left[\sum_{k=1}^{n} c_{kj} \, x_k \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \, T_1(x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \sum_{i} a_{ik} \, x_i \qquad (\because \ T_1(x_j) = \Sigma \ a_{ij} \, x_i$$

$$= \sum_{i} \left(\sum_{k} a_{ik} \, c_{kj} \right) x_i \qquad —(1)$$

மேலும், $T_1(y_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, y_k\right) \qquad (\because \quad T_1(y_j) = \sum b_{ij}\, y_i)$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, T(x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\, x_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, b_{kj} \right) x_i$$

(அ-து) $T_1(y_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, b_{kj} \right) x_i \qquad$ —(2)

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} \right) x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, b_{kj} \right) x_i$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, b_{kj}$$

(அல்லது) $[a_{ij}]\ [c_{ij}] = [c_{ij}]\ [b_{ij}]$

(அ-து) $[T_1]_{B1}\ [T]_{B1} = [T]_{B1}\ [T_1]_{B2}$

இருபக்கமும் $[T]_{B1}'$-ஆல் முன் பெருக்கம் (Pre-multiply) செய்யின்,

$$[\bar{T}]'_{B1}\ [T_1]_{B1}\ [T]_{B1} = [\bar{T}]'_{B1}\ [T]_{B1}\ [T_1]_{B2} = [T_1]_{B2}$$

$$\therefore \quad [T_1]_{B2} = [T]_{B1}^{-\prime}\ [T_1]_{B1}\ [T]_{B1}$$

6-14. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த அனைத்து $n \times n$ அணிகளது கணத்தில் வடிவொப்புமை (similarity) ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும் (equivalence relation).

நிருபணம்

A, *B* அணிகள் வடிவொத்தவை (similar) எனின், *P* என்ற மற்றொரு $n \times n$ அணி

$$A = P\, B\, \bar{P}' \quad (\text{அல்லது}) \quad B = \bar{P}'\, A\, P$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

இனி R என்ற இத்தொடர்பு சரிநிகர் தொடர்பு என நிறுவு வோம்.

பிரதிபலிக்கும் தன்மை

I நேர்மாறுத் தன்மையுடைய அலகு அணி எனின், $A = I A \bar{I}'$ எனவே, A அணி A-யுடன் வடிவொத்துள்ளது; அதாவது, $A R A$.

$\therefore$ R என்ற தொடர்பு பிரதிபலிக்கும் தன்மை (Reflexive) கொண்டதாகும்.

சமச்சீர் தன்மை

$$\begin{aligned} A &= P B \bar{P}' \\ \therefore \quad \bar{P}' A P &= \bar{P}' (P B \bar{P}') P \\ &= (\bar{P}' P) B (\bar{P}' P) \\ &= B \\ \therefore \quad B &= \bar{P}' A (\bar{P}')' \quad (\because P \text{ நேர்மாறுத் தன்மையுடையது}) \\ &= C A \bar{C}', \quad C = \bar{P}' \end{aligned}$$

$\therefore$ அணி B அணி A-யுடன் சமச்சீரில் உள்ளது. எனவே, R என்ற தொடர்பு சமச்சீர் (symmetric) கொண்டதாகும்.

கடத்தும் தன்மை

A அணி B அணியுடனும், B அணி C அணியுடனும் வடிவொத் துள்ளது என்க.

$\therefore$ P, Q என்ற இரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய இரு அணிகள்,

$$A = P B \bar{P}'$$
$$B = Q C \bar{Q}'$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

$$\begin{aligned} \therefore \quad A &= P B \bar{P}' \\ &= P (Q C \bar{Q}') \bar{P}' \\ &= (P Q) C (\bar{Q}' \bar{P}') \\ &= (P Q) C \overline{(P Q)}' \end{aligned}$$

{P, Q நேர்மாறுத் தன்மையுடையவை எனின், (PQ)-ம் நேர்மாறுத் தன்மையுடையவையாம்.

எனவே, அணி A அணி C-யுடன் வடிவொத்திருக்கும்.

$\therefore$ R என்ற தொடர்பு கடத்தும் தன்மை (Transitive) கொண்டதாகும்.

எனவே, R என்ற தொடர்பு ஒரு சரிநிகர் தொடர்பு (equivalence relation) ஆகும்.

6–15. தேற்றம்

ஒரு வெக்டர் வெளி மீதமைந்த ஒருபடி நிலே மாற்றங்களின் வடிவொப்புமை ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும்.

நிரூபணம்

V-ல் உள்ள அனைத்து ஒருபடி நிலே மாற்றங்களது கணம் $L(V, V)$ என்க. T_1, T_2 இரண்டும் வடிவொத்தவை எனின், T என்ற ஒரு நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒருபடி நிலே மாற்றம்

$$T_1 = T\,T_2\,\bar{T}' \qquad (\text{அ}) \qquad T_2 = \bar{T}'\,T_1\,T$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

பிரதிபலிக்கும் தன்மை (Reflexive)

$T_1 \in L(V, V)$ என்ற ஒவ்வொரு ஒருபடி நிலே மாற்றமும்,

$$T_1 = I\,T_1\,\bar{I}'$$

என்றாகும். (I – நேர்மாறுத் தன்மையுடைய சர்வசம ஒருபடி நிலே மாற்றம்).

$\therefore\ T_1 \,|||\, T_1$ (அ-து) $T_1\,R\,T_1$

எனவே, R தொடர்பு பிரதிபலிக்கும் தன்மையுடையது.

சமச்சீருடையது (Symmetric)

T_1-ஆனது T_2-வுடன் வடிவொத்திருப்பின், T என்ற நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒருபடி நிலே மாற்றம்

$$T_1 = T\,T_2\,\bar{T}'$$

என்ற முறையில் உள்ளது.

$$\therefore\ \bar{T}'\,T_1\,T = \bar{T}'(T\,T_2\,\bar{T}')\,T$$
$$= (\bar{T}'\,T)\,T_2\,(\bar{T}'\,T)$$

$\therefore\ T_2$ என்பது T_1-வுடன் வடிவொத்திருக்கிறது.

எனவே, R என்ற தொடர்பு சமச்சீருடையது.

கடத்தும் தன்மை (Transitive)

T_1 என்பது T_2–உடனும், T_2 என்பது T_3-உடனும் வடிவொத்துள்ளது என்க. எனவே, P, Q என்று நேர்மாறுத் தன்மையுடைய இரு ஒருபடி நிலே மாற்றங்கள்

$$T_1 = P\,T_2\,\bar{P}'$$
$$T_2 = Q\,T_3\,\bar{Q}'$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

$$\therefore\ T_1 = P\,T_2\,\bar{P}'$$
$$= P\,(Q\,T_3\,\bar{Q}')\,\bar{P}'$$
$$= (P\,Q)\,T_3\,(\bar{Q}'\,\bar{P}')$$
$$= (P\,Q)\,T_3\,\overline{(P\,Q)}'$$

∴ T_1-ஆனது T_3-உடன் வடிவொத்திருக்கும்,

எனவே, R தொடர்பு கடத்தும் தன்மையுடையது.

∴ வடிவொப்புமை ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும்.

6–16. ஒருபடி செயலியின் அணிக்கோவை

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது T ஒருபடிச் செயலி என்க. B என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்து T-ன் அணி $[T]$ எனின்,

T-ன் அணிக்கோவை $=$ $[T]$-ன் அணிக்கோவை என வரையறுக்கப்படும்.

6–17. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீதமைந்த T என்ற ஒருபடிச் செயலியின் அணிக்கோவை ஒரே முறையில் (unique) இருக்கும்.

நிரூபணம்

B_1, B_2 என்ற அடிப்படைகளைச் சார்ந்து $V(F)$ வெக்டர் வெளி மீதமைந்துள்ள T என்ற ஒருபடிச் செயலியின் அணிகள் முறையே $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ என்க.

(அ-து) $[T]_{B1} = [a_{ij}],\ [T]_{B2} = [b_{ij}]$

எனவே, $[c_{ij}]$ என்ற நேர்மாறுத் தன்மையுடைய ஒருபடிச் செயலி,

$$[b_{ij}] = \overline{[c_{ij}]}'\ [a_{ij}]\ [c_{ij}]$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

∴ அணிக்கோவை $[b_{ij}]$ = அணிக்கோவை $\{\overline{[c_{ij}]}'\ [a_{ij}]\ [c_{ij}]\}$

= அணிக்கோவை $\overline{[c_{ij}]}'$ அணிக்கோவை $[a_{ij}]$ அணிக்கோவை $[c_{ij}]$

= அணிக்கோவை $\overline{[c_{ij}]}'$ அணிக்கோவை $[c_{ij}]$ அணிக்கோவை $[a_{ij}]$

= {அணிக்கோவை $\overline{[c_{ij}]}'$ அணிக்கோவை $[c_{ij}]$}அணிக்கோவை$[a_{ij}]$

$=$ அணிக்கோவை $[I]$ அணிக்கோவை $[a_{ij}]$
$= I$ அணிக்கோவை $[a_{ij}]$
$=$ அணிக்கோவை $[a_{ij}]$

(அ-து) அணிக்கோவை $[b_{ij}] =$ அணிக்கோவை $[a_{ij}]$.

மாதிரி – 1

மெய்யெண்களைக் கெழுக்களாகவும், மீப்பெருபடி n-ம் கொண்ட x-ன் அனைத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி $V(F)$ என்க. V-ல் அமைந்த D என்ற ஒருபடிச் செயலி,

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)), \qquad \forall f(x) \in V(F)$$

என வரையறுக்கப்படின், $V(F)$-ன் ஓர் அடிப்படையைச் சார்ந்து D-ன் அணியைக் காண்க.

நிரூபணம்

$$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

என்பது $V(F)$-ன் ஓர் அடிப்படை என்க.

$$\begin{aligned}
D(1) = 0 \quad &= 0.1 + 0.x + 0.x^2 + \ldots + 0.x^n \\
D(x) = 1 \quad &= 1.1 + 0.x + 0.x^2 + \ldots + 0.x^n \\
D(x^2) = 2x \quad &= 0.1 + 2.x + 0.x^2 + \ldots + 0.x^n \\
&\ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\
D(x^n) = nx^{n-1} &= 0.1 + 0.x + 0.x^2 + \ldots + 0.x^{n-1} + 0.x^n
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ கெழு அணி } = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே, D செயலியின் அணி

$=$ கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–2

$T: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$ என்ற நிலைமாற்றம்

$$T(x, y) = (2x + 3y,\ x - y)$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், திட்டமான அடிப்படை (Standard basis)-யைச் சார்ந்த T-ன் அணியைக் காண்க.

நிரூபணம்

$V_2(R)$-ன் திட்டமான அடிப்படை $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$$T(x, y) = (2x + 3y,\ x - y)$$

$$\therefore \quad T(1, 0) = (2 + 0, 1 - 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (0 + 3, 0 - 1) = (3, -1) = 3(1, 0) - 1(0, 1)$$

அதாவது, $T(x_1) = 2x_1 + x_2$

$T(x_2) = 3x_1 - x_2$, $\quad x_1 = (1, 0)$

$x_2 = (0, 1)$

$$\text{கெழு அணி} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

எனவே, T-ன் அணி

= கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–3

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம்

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 9z,\ 5x + 3y - 2z)$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், V-ன் திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்து T-ன் அணியைக் காண்க.

நிரூபணம்

$V_3(R)$-ன் திட்டமான அடிப்படை,

$$B_1 = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$$

$V_2(R)$-ன் திட்டமான அடிப்படை,

$$B_2 = \{(1, 0),\ (0, 1)\}$$

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 9z,\ 5x + 3y - 2z)$$

$$\therefore \quad T(1, 0, 0) = (2 - 0 + 0,\ 5 + 0 - 0) = (2, 5)$$

$$= 2(1, 0) + 5(0, 1) = 2x_1 + 5x_2$$

$$T(0,1,0) = (0-4+0,\ 0+3-0) = (-4, 3)$$
$$= -4(1,0) + 3(0,1) = -4x_1 + 3x_2$$
$$T(0,0,1) = (0-0+9,\ 0+0-2) = (9,-2)$$
$$= 9(1,0) - 2(0,1) = 9x_1 - 2x_2.$$

(அ-து) $T(1,0,0) = 2x_1 + 5x_2$ $\quad x_1 = (1, 0)$
$T(0,1,0) = -4x_1 + 3x_2$ $\quad x_2 = (0, 1)$
$T(0,0,1) = 9x_1 - 2x_2$

எனவே, கெழு அணி $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ T-ன் அணி = கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–4

$V_3(R)$-ல் அமைந்த T என்ற நிலைமாற்றம்

$$T(x, y, z) = (x, y, o)$$

என வரையறுக்கப்படின், திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணியினைக் காண்க.

நிரூபணம்

$V_3(R)$-ன் திட்டமான அடிப்படை,

$$B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$T(x,y,z) = (x,y,o) \qquad \text{(வரையறை)}$$

$\therefore$ $T(1,0,0) = (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$
$T(0,1,0) = (0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$
$T(0,0,1) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,0,0) + 0(0,0,0)$

(அ-து) $T(1,0,0) = 1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3$
$T(0,1,0) = 0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3$
$T(0,0,1) = 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3$

$x_1 = (1,0,0),\ x_2 = (0,1,0),\ x_3 = (0,0,1)$

$\therefore$ கெழு அணி $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

எனவே, T-ன் அணி

= கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–5

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ ஒருபடி நிலை மாற்றம் என்க.

$V_3(R), V_2(R)$ ஆகியவற்றின் அடிப்படைகள் முறையே

$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}, \{1, 3), (2, 5)\}$

எனின்,

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

என்ற வரையறையின் கீழ் T-ன் அணியை மேற்குறிப்பிட்ட அடிப்படைகளைச் சார்ந்து காண்க.

நிரூபணம்

$V_3(R)$-ன் அடிப்படை $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

$V_2(R)$-ன் அடிப்படை $B_2 = \{(1, 3), (2, 5)\}$

$$T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

$$\therefore \quad T(1, 1, 1) = (3 + 2 - 4, 1 - 5 + 3) = (1, -1)$$
$$T(1, 1, 0) = (3 + 2 - 0, 1 - 5 + 0) = (5, -4)$$
$$T(1, 0, 0) = (3 + 0 - 0, 1 - 0 + 0) = (3, 1).$$

$(1, -1)$ என்பது B_2-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாதலின்,

$$\begin{aligned}(1, -1) &= a(1, 3) + b(2, 5) \\ &= (a, 3a) + (2b, 5b) \\ &= (a + 2b, 3a + 5b)\end{aligned}$$

எனவே, $a + 2b = 1, \; 3a + 5b = -1$

$$\therefore \quad a = -7, \; b = 4.$$

இவ்வாறே, $(5, -4) = a(1, 3) + b(2, 5)$
$= (a + 2b, 3a + 5b)$

எனவே, $a + 2b = 5, \; 3a + 5b = -4$

$$\therefore \quad a = -33, \; b = 19$$

$$\begin{aligned}(3, 1) &= a(1, 3) + b(2, 5) \\ &= (a + 2b, 3a + 5b)\end{aligned}$$

எனவே, $a + 2b = 3,\ 3a + 5b = 1$

$\therefore\ a = -13,\ b = 8.$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1,-1) &= -7\,(1, 3) + 4\,(2, 5)\\ (5,-4) &= -33\,(1, 3) + 19\,(2, 5)\\ (3,\ 1) &= -13\,(1, 3) + 8\,(2, 5)\end{aligned}$$

(அ-து) $T\,(1, 1, 1) = -7x_1 + 4x_2$

$T\,(1, 1, 0) = -33x_1 + 19x_2$

$T\,(1, 0, 0) = -13x_1 + 8x_2\ ;\quad x_1 = (1, 3),\ x_2 = (2, 5)$

$\therefore$ கெழு அணி $= \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -33 & 19 \\ -13 & 8 \end{bmatrix}$

எனவே, T-ன் அணி

= கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$= \begin{bmatrix} 7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}$

மாதிரி–6

$V_3\,(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியினது திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்து T என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் அணி

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ எனின், $\{ (0, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 0) \}$

என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்து T-ன் அணியைக் காண்க.

நிரூபணம்

$V_3\,(R)$-ன் திட்டமான அடிப்படை,

$B = \{ 1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1) \}$

கொடுத்துள்ளபடி. $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\therefore\ T\,(1, 0, 0) &= 0\,(1, 0, 0) + 1\,(0, 1, 0) - 1\,(0, 0, 1) = (0, 1, -1)\\ T\,(0, 1, 0) &= 1\,(1, 0, 0) + 0\,(0, 1, 0) - 1\,(0, 0, 1) = (1, 0, -1)\\ T\,(0, 0, 1) &= 1\,(1, 0, 0) - 1\,(0, 1, 0) + 0\,(0, 0, 1) = (1, -1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ T(a, b, c) &= T[a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)] \\ &= aT(1,0,0) + bT(0,1,0) + cT(0,0,1) \\ &= a(0,1,-1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0) \\ &= (o + b + c,\ a + o - c,\ -a - b + o) \\ &= (b + c,\ a - c,\ -a - b) \end{aligned}$$

எனவே, $T(a, b, c) = (b + c, a - c, -a - b)$ என்ற முறையில் T வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

அடுத்து, $B_1 = \{(0, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 0)\}$

$T(a, b, c) = (b + c,\ a - c,\ -a - b)$ ஆதலின்,

$$T(0, 1, -1) = (0, 1, -1) = 1(0, 1, -1) + 0(1, -1, 1) + 0(-1, 1, 0)$$
$$T(1, -1, 1) = (0, 0, 0) = 0(0, 1, -1) + 0(1, -1, 1) + 0(-1, 1, 0)$$
$$T(-1, 1, 0) = (1, -1, 0) = 0(0, 1, -1) + 0(1, -1, 1) - 1(-1, 1, 0)$$

(அ-து) $T(0, 1, -1) = 1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3$
$T(1, -1, 1) = 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3$
$T(-1, 1, 0) = 0.x_1 + 0.x_2 - 1.x_3$

$[x_1 = (0, 1, -1),\ x_2 = (1, -1, 1),\ x_3 = (-1, 1, 0)]$

$$\therefore \text{ கெழு அணி } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

எனவே, T-ன் அணி

= கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–7

$V_2(R)$-ன் இரு அடிப்படைகள் $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ என்க. அடிப்படைகள் B_1-லிருந்து B_2-க்குப் & B_2-லிருந்து B_1-க்கும் ஆன வேறுபாடு அணிகள் முறையே P, Q எனின், அவற்றை காண்க. மேலும், $\bar{P}' = Q$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

முதலில் B_1-லிருந்து B_2-க்கான P-ஐக் காண்போம்.

$B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (-1, 0)\}$

$(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$

$(-1, 0) = -1(1, 0) + 0(0, 1)$

$$\therefore \text{ கெழு அணி } = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே, $P =$ கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

அடுத்து Q-ஐக் காண்போம்

$B_2 = \{ (1, 1), (-1, 0) \}, \; B_1 = \{ (1, 0), (0, 1) \}$

$(1, 0) = a\,(1, 1) + b\,(-1, 0)$ என்க.

$= (a, a) + (-b, o)$

$= (a-b, a)$

$a-b = 1, \; a = o \quad \therefore \; b = -1.$

$$\therefore \; (1, 0) = 0\,(1, 1) - 1\,(-1, 0)$$
$$(0, 1) = a\,(1, 1) + b\,(-1, 0)$$
$$= (a-b, \; a)$$

எனவே, $a = 1, \; b = 1.$

$$\therefore \; (0, 1) = 1\,(1, 1) + 1\,(-1, 0).$$

(அ-து) $(1, 0) = 0\,(1, 1) - 1\,(-1, 0) = 0.x_1 - 1.x_2$

$(0, 1) = 1\,(1, 1) + 1\,(-1, 0) = 1.x_1 + 1.x_2$

$[\, x_1 = (1, 1), \; x_2 = (-1, 0) \,]$

$$\therefore \text{ கெழு அணி } = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே, $Q =$ கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

அடுத்து $\bar{P}' = Q$ என நிறுவுவோம்

$$P\,Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0 + 1 & 1 - 1 \\ 1.0 - 0.1 & 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

(அ-து) $PQ = I$

இருபுறமும் $\bar{P}'$-ஆல் முன் பெருக்கம் (Pre-multiply) செய்தால்,

$$\bar{P}' PQ = \bar{P}' I$$

$$\therefore \quad I \ Q = \bar{P}' I$$

எனவே, $Q = \bar{P}'$.

மாதிரி-8

$C(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியினது இரு அடிப்படைகள்

$B_1 = \{1, i\}$, $B_2 = \{1 + i, 1 + 2i\}$ எனின்,

(i) B_1-லிருந்து B_2-க்கும், B_2-லிருந்து B_1-க்குமான மாறுபாடு அணிகள் P, Q-ஐக் காண்க.

(ii) $[T]_{B2} = \bar{P}' [T]_{B1} P$, $T(x) = \bar{x}$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i) $B_1 = \{1, i\} = \{x_1, x_2\}$
$B_2 = \{1 + i, 1 + 2i\} = \{y_1, y_2\}$ என்க.

$$\therefore \quad y_1 = 1 + i = x_1 + x_2$$
$$y_2 = 1 + 2i = x_1 + 2x_2$$

$$\therefore \quad \text{கெழு அணி} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

எனவே,

$$P = \text{கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

மீண்டும்,

$$x_1 = 1 = a(1 + i) + b(1 + 2i)$$
$$= (a + ia) + (b + 2bi)$$
$$= (a + b) + i(a + 2b)$$

$$\therefore \quad a + b = 1, \ a + 2b = 0$$

எனவே, $a = +2$, $b = -1$

$$\therefore \quad x_1 = 2(1 + i) - 1(1 + 2i)$$

மேலும், $x_2 = i = a(1 + i) + b(1 + 2i)$
$$= (a + ai) + (b + 2bi)$$
$$= (a + b) + i(a + 2b)$$

$\therefore \quad a + b = 0,\ a + 2b = 1$

எனவே, $a = -1,\ b = 1$

$\therefore \quad x_2 = -1\,(1 + i) + 1.\,(1 + 2i)$

(அ-து) $x_1 = 2y_1 - 1.y_2$

$x_2 = -1.y + 1.y_2$

எனவே, கெழு அணி $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ஆகவே, Q = கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $T(x) = \bar{x}$

$T(x_1) = T(1) = \bar{1} = 1$

$= 1\,(1) + o.i = 1.x_1 + 0.x_2$

$T(x_2) = T(i) = \bar{i} = -i = 0.1 - 1.i = 0.x_1 - 1.x_2$

$\therefore$ கெழு அணி $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

எனவே, $[T]_{B1}$ = கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

மீண்டும்,

$T(y_1) = T(1 + i) = \overline{1+i} = 1 - i$

$T(y_2) = T(1 + 2i) = \overline{1+2i} = 1 - 2i$

$1 - i = a\,(1 + i) + b\,(1 + 2i)$

$= (a + ai) + (b + 2bi)$

$= (a + b) + i\,(a + 2b)$

$\therefore \quad a + b = 1,\ a + 2b = -1$

எனவே, $a = 3,\ y = -2$

$\therefore \quad 1 - i = 3\,(1 + i) - 2\,(1 + 2i) \qquad \text{—(1)}$

$$1-2i = a(1+i) + b(1+2i)$$
$$= (a+ai) + (b+2bi)$$
$$= (a+b) + i(a+2b)$$
$$\therefore \quad a+b = 1, \quad a+2b = -2$$

எனவே, $a = 4$, $b = -3$.

$$\therefore \quad 1-2i = 4(1+i) - 3(1+2i) \qquad \text{—(2)}$$

(1)—லிருந்து, $T(y_1) = 3y_1 - 2y_2$

(2)—லிருந்து, $T(y_2) = 4y_1 - 3y_2$

எனவே, கெழு அணி $= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad [T]_{B2}$ = கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(அ-து) $[T]_{B1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $[T]_{B2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

அடுத்து $\bar{P}'$-ஐத் தீர்மானிப்போம்.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-1) = 1.$$

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$ என்க.

$\therefore$ a_{11}-ன் இணைக்காரணி $= A_{11} = 2$

a_{12}-ன் இணைக்காரணி $= A_{12} = -1$

a_{21}-ன் இணைக்காரணி $= A_{21} = -1$

a_{22}-ன் இணைக்காரணி $= A_{22} = 1$

$$\therefore \quad [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{P}' = \frac{1}{|P|}[A_{ij}] = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே, $\bar{P}'\,[T]_{B1}\,P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2.1 - 1.0 & 2.0 + 1.1 \\ -1.1 + 1.0 & -1.0 - 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1 + 1.1 & 2.1 + 1.2 \\ -1.1 - 1.1 & -1.1 - 1.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 1 & 2 + 2 \\ -1 - 1 & -1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= [T]_{B2}$$

$\therefore \quad \bar{P}'\,[T]_{B1}\,P = [T]_{B2}.$

மாதிரி–9

$B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{1, 2), (2, 3)\}$ என்பவை $V_2(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியினது இரு அடிப்படைகள், $z \in V_2(R)$, B_1-லிருந்து B_2-க்கான மாறுபாடு அணி (Transition matrix) P எனின்,

$$[z]_{B1} = P\,[z]_{B2}$$

என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

நிரூபணம்

முதலில் மாறுபாடு அணி P-ஐக் காண்போம்

$B_1 = \{1, 0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

$(1, 2) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)$ என்க.

$\therefore \quad (1, 2) = (a, 0) + (0, b)$

$= (a, b)$

$\therefore \quad a = 1, \; b = 2.$

எனவே, $(1, 2) = 1\,(1, 0) + 2\,(0, 1)$

இவ்வாறே, $(2, 3) = 2\,(1, 0) + 3\,(0, 1)$

$\therefore \quad y_1 = 1.\,x_1 + 2.x_2$

$y_2 = 2.\,x_1 + 3.x_2$

$[x_1 = (1, 0), \; x_2 = (0, 1), \; y_1 = (1, 2), \; y_2 = (2, 3)]$

$\therefore$ கெழு அணி $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

எனவே, P = கெழு அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

அடுத்து $[z]_{B_2}$-ஐக் காண்போம்

$z = (x, y) \in V$ என்க.

$$\therefore \quad (x, y) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)$$
$$= (a, 0) + (0, b) = (a + b)$$

$$\therefore \quad x = a, \; y = b.$$

அதாவது, $(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1).$

எனவே, B_1-ஐச் சார்ந்த z-ன் கூறு வெக்டர் $= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(அ-து) $[z]_{B1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$

இனி, $[z]_{B2}$-ஐக் காண்போம்

$z = (x, y) \in V$ என்க.

$$\therefore \quad (x, y) = a\,(1, 2) + b\,(2, 3)$$
$$= (a, 2a) + (2b, 3b)$$
$$= (a + 2b, \; 2a + 3b)$$

$$\therefore \quad a + 2b = x, \; 2a + 3b = y$$

எனவே, $a = -3x + 2y, \; b = 2x - y.$

$$\therefore \quad (x, y) = (-3x + 2y)\,(1, 2) + (2x - y)\,(2, 3)$$

ஆகவே, B_2-ஐச் சார்ந்த z-ன் கூறு வெக்டர் $\begin{bmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}$

(அ-து) $(z)_{B2} = \begin{pmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}.$

அடுத்து $(z)_{B1} = P\,(z)_{B2}$ என நிறுவுவோம்

$$P\,(z)_{B2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3x + 2y + 2\,(2x - y) \\ 2\,(-3x + 2y) + 3\,(2x - y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3x + 2y + 4x - 2y \\ -6x + 4y + 6x - 3y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [z]_{B1}$$

$\therefore \quad [z]_{B1} = P\,[z]_{B2}$

பயிற்சி 6

1. $V_2(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் மீதமைந்துள்ள பின்வரும் ஒருபடிச் செயலிகளது $V_2(R)$-ன் திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்த அணிகளைக் காண்க.

(i) $T(a, b) = (3a - 4b, a + 5b)$

(ii) $T(a, b) = (2a - 3b, a + b)$

(iii) $T(a, b) = (2b, 3a - b)$.

$\left\{ \text{விடைகள்: (i) } \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ (ii) } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (iii) } \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

2. $V_3(R)$ வெக்டர் வெளி மீதமைந்த T எனும் ஒருபடிச் செயலி, $T(a, b, c) = 2b + c,\ a - 4b, 3a)$ என வரையறுக்கப் பட்டிருப்பின்,

(i) $\{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0)\ (1, 0, 0)\}$

(ii) $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$

என்ற அடிப்படைகளைச் சார்ந்த T-ன் அணிகளைக் காண்க.

$\left\{ \text{விடைகள் : (i) } \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ii) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

3. $V_2(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியினது $\{1, 0), (0, 1)\}$ என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்த ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் அணி $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், $\{(1, 1),\ (1, -1)\}$ என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்த ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் அணியினைக் காண்க.

$\left\{ \text{விடை : } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right\}$

4. அனைத்து 2×2 அணிகளது வெக்டர்வெளி $V(F)$ என்க. V-மீதமைந்து ஒருபடி நிலைமாற்றம் T,

$$T(x) = Ax,\ x \in V,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

என்ற முறையில் இருப்பின்,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

என்ற அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணியைக் காண்க.

$$\left\{ \text{விடை : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

5. வழக்கமான அடிப்படைகளைச் சார்ந்த பின்வரும் ஒருபடி நிலைமாற்றங்களது அணிகளைக் காண்க.

(i) $T : V_3(R) \to V_3(R),\ T(a, b, c) = (c, b + c, a+b+c)$

(ii) $T : V(R) \to V_2(R),\ T(a) = (3a, 5a)$

(iii) $T : V_3(R) \to V_2(R),\ T(a, b, c) = [2a - 4b + 9c,\ 5a + 3b - 2c]$

$$\left\{ \text{விடைகள்: (i) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ii) } \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ (iii) } \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

6. $T: V_3(R) \to V_2(R)$ என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம்

$$T: (a, b, c) = (2a + b - c,\ 3a - 2b + 4c)$$

என வரையறுக்கப்படின்,

(i) முறையே $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, $\{(1, 3), (1, 4)\}$ என்ற $V_3(R)$, $V_2(R)$-ன் அடிப்படைகளைச் சார்ந்த T-ன் அணியைக் காண்க.

(ii) $[T]_{B1}^{B2}\,[x]_{B1} = [T(x)]_{B2}$ என நிறுவுக.

$$\left\{ \text{விடைகள்: (i) } \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix} \text{ (ii) } [x]_{B1} = \begin{bmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{bmatrix},\ [T(x)]_{B2} = \begin{bmatrix} 5a + 6b - 8c \\ -3a - 5b + 7c \end{bmatrix} \right\}$$

7. $T: V_3(R) \rightarrow V_3(R)$ ஒருபடி நிலை மாற்றம் என்க. திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்து T-ன் அணி $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், நிலை மாற்றத்தைக் காண்க.

{ விடை: $T(x, y, z) = (x, y, o)$ }

8. $T(a, b) = (4a-2b, 2a+b)$ என்க. $B_1 = \{(1,0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ என்ற அடிப்படைகளில் B_1-லிருந்து B_2-க்கான மாறுபாடு அணி P என்க. பின்,

(i) $[T]_{B2} = \bar{P}^1 [T]_{B1} P$

(ii) $P[x]_{B2} = [x]_B$, $x \in V_2(R)$

என நிறுவுக.

9. $V_2(R)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் இரு அடிப்படைகள் $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ எனின்,

(i) B_1-லிருந்து B_2-க்கான மாறுபாடு அணி P-ஐயும் B_2-லிருந்து B_1-க்கான மாறுபாடு அணி Q-ஐயும் காண்க.

(ii) $\bar{P}^1 [T]_{B1} P = [T]_{B2}$, $T(a, b) = (2a-3b, a+b)$ என நிறுவுக.

10. பின் வருபனவற்றில் எதில் $x(A) = O$ என்பது மெய்யாகும் எனக் காண்க.

(i) $x(t) = t^2 - 3t$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $x(t) = t^3 - 2t$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

{ விடை: இரண்டிலும் மெய்யாகும் }.

11. $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2)$ என்ற வகையில் அமைந்துள்ள நிலை மாற்றம் ஒருபடி நிலை மாற்றம் என நிறுவுக.

12. T என்ற ஓர் உருமாற்றம்,

$$T[p(x)] = \int_0^x p(x)\,dx, \; p(x) \in R(x)$$

என வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என நிறுவுக.

7. உட்பெருக்கு வெளிகள்

(Inner product spaces)

7–1. உட்பெருக்கம் (Inner product)

$V_3(R)$ என்பது R களத்தின் மீதமைந்த முப்பரிமாண மெய் வெக்டர்களது கணம் என்க. முப்பரிமாண வெளியில், A, B என்பவை இரு புள்ளிகள் எனவும் அவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் x, y எனவும் கொள்வோம்.

(அ-து) $x = (a_1, a_2, a_3)$
$y = (b_1, b_2, b_3)$

பின், $\overline{BA} = x - y = (a_1 - b_1, \; a_2 - b_2, \; a_3 - b_3)$

$(x - y)$ என்ற வெக்டரின் அளவு (அ) நீளம்

$$= \sqrt{\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\}}.$$

(அ-து) $|x - y| = \sqrt{\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\}}$

ஆதி O புள்ளி எனின்,

$$OA = |x| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}.$$

இது $\|x\|$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எனவே, $\|x\| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$
$\|x - y\| = \sqrt{\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\}}$

x, y என்ற இரு வெக்டர்களது உட்பெருக்கம் $x.y = |x| \; |y| \cos\theta$ என வரையறுக்கப்படும்.

(θ என்பது x, y வெக்டர்களது திசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்.)

புதிய குறியீட்டின்படி, x, y வெக்டர்களது உட்பெருக்கம்

$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad (x, y) = \|x\| \, \|y\| \cos \theta.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|}.$$

7–2. உட்பெருக்கம்—மெய், சிக்கலெண் வெக்டர் வெளிகள் (Inner product—Real & complex vector spaces)

(i) $x, y \in V_3(R)$, $x = (a_1, a_2, a_3)$, $y = (b_1, b_2, b_3)$ என்க.

பின், $(x, x) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|x\|^2 > 0$

$$\begin{aligned} (x, x) = o &\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = o \\ &\Rightarrow a_1 = o, \; a_2 = o, \; a_3 = o \\ &\Rightarrow x = o \end{aligned}$$

மீண்டும், $x = o$

$$\Rightarrow x = (o, o, o)$$

$$\therefore \quad (x, x) = o^2 + o^2 + o^2 = o$$

எனவே, $(x, x) = o \iff x = o$

ஆனல் $x \in V_3(c)$ [சிக்கலெண் வெக்டர் வெளி] எனின், அதாவது, $x = (1, i, o)$ எனின்,

$$x = (1, i, o) \neq o.$$

ஆனல் $(x, x) = 1^2 + i^2 + o^2 = 1 - 1 + o = o$

(அ-து) $(x, x) = o, \; x \neq o.$

எனவே, $(x, x) = o \iff x = o$ என்பது சிக்கல் எண் வெக்டர் வெளி (Complex vector space)-க்குப் பொருந்தாது.

ஆகவே, உட்பெருக்கத்திற்கு வேறு ஒரு வழியில் வரையறை செய்வோம்.

$x = (a_1, a_2, a_3)$, $y = (b_1, b_2, b_3) \in V_3(c)$ எனின்,

$$(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3$$

[$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ என்பவை இணைச் சிக்கலெண்கள் (complex conjugate)] என வரையறுப்போம்.

$$\begin{aligned} \therefore \quad (x, x) &= a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2 + a_3 \bar{a}_3 \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2, \quad (\because \; a\bar{a} = |a|^2) \\ &= \text{மெய்யெண்கள்} \geq o. \end{aligned}$$

$(x, x) = o$ எனின், $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = o$

$\therefore \quad a_1 = o, \; a_2 = o, \; a_3 = o$

$\therefore \quad x = o$

எனவே, $(x, x) = o \Rightarrow x = o$

அடுத்து $x = o$ எனின், $x = (o, o, o)$

$\therefore \quad a_1 = o, \; a_2 = o, \; a_3 = o$

$\therefore \quad (x, x) = o^2 + o^2 + o^2 = o$

$\therefore \quad x = o \Rightarrow (x, x) = o$

எனவே, $(x, x) = o \Longleftrightarrow x = o.$

எனவே, $(x.y) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3$

என்ற புதிய உட்பெருக்க வரையறையின் கீழ்

$(x, x) = o \Longleftrightarrow x = o$

என்பது மெய்யெண், சிக்கலெண் வெளிகளில் பொருந்தும்.

(ii) $x, y \in V_3(R)$ [மெய்யெண் வெக்டர் வெளி] எனின்,

$$\begin{aligned} (x, y) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ &= (y, x) \end{aligned}$$

$\therefore \quad (x, y) = (y, x)$

(அ-து) பரிமாற்று விதி மெய்யெண் வெக்டர் வெளியில் பொருந்தும்.

$x, y \in V_3(c)$ [சிக்கலெண் வெக்டர் வெளி] எனின்,

$(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3$

$(y, x) = b_1 \bar{a}_1 + b_2 \bar{a}_2 + b_3 \bar{a}_3$

$\therefore \quad (x, y) \neq (y, x)$

(அ-து) பரிமாற்று விதி சிக்கலெண் களத்தில் பொருந்தாது.

ஆனல், $$\begin{aligned} \overline{(y, x)} &= \overline{b_1 \bar{a}_1 + b_2 \bar{a}_2 + b_3 \bar{a}_3} \\ &= \bar{b}_1 \bar{\bar{a}}_1 + \bar{b}_2 \bar{\bar{a}}_2 + \bar{b}_3 \bar{\bar{a}}_3 \\ &= \bar{b}_1 a_1 + \bar{b}_2 a_2 + \bar{b}_3 a_3, \quad (\because \bar{\bar{a}} = a) \\ &= a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3 \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

$\therefore \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$

(iii) $x, y \in V_3(R)$ எனின்,

$$
\begin{aligned}
a, b \in R, \quad ax + by &= a(a_1, a_2, a_3) + b(b_1, b_2, b_3) \\
&= (aa_1, aa_2, aa_3) + (bb_1, bb_2, bb_3) \\
&= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, aa_3 + bb_3) \\
&\in V_3(R).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ax + by, z) &= [(aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, aa_3 + bb_3), (c_1, c_2, c_3)] \\
&= [(aa_1 + bb_1) c_1 + (aa_2 + bb_2) c_2 + (aa_3 + bb_3) c_3] \\
&= \{(aa_1) c_1 + (aa_2) c_2 + (aa_3) c_3\} \\
&\quad + \{(bb_1) c_1 + (bb_2) c_2 + (bb_3) c_3\} \\
&= a(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) + b(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) \\
&= a(x, z) + b(y, z).
\end{aligned}
$$

(அ-து) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$, $z = (c_1, c_2, c_3) \in V_3(R)$

$x, y \in V_3(c)$ எனின்,

$a, b \in c$, $\quad ax + by = a(a_1, a_2, a_3) + b(b_1, b_2, b_3)$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad (ax + by) &= (aa_1, aa_2, aa_3) + (bb_1, bb_2, bb_3) \\
&= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, aa_3 + bb_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ax + by, z) &= [(aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2, aa_3 + bb_3)(c_1, c_2, c_3)] \\
&= [(aa_1 + bb_1) \bar{c}_1 + (aa_2 + bb_2) \bar{c}_2 + (aa_3 + bb_3) \bar{c}_3] \\
&= [\{(aa_1) \bar{c}_1 + (aa_2) \bar{c}_2 + (aa_3) \bar{c}_3\} + \\
&\quad \{(bb_1) \bar{c}_1 + (bb_2) \bar{c}_2 + (bb_3) \bar{c}_3\}] \\
&= a(a_1 \bar{c}_1 + a_2 \bar{c}_2 + a_3 \bar{c}_3) + b(b_1 \bar{c}_1 + b_2 \bar{c}_2 + b_3 \bar{c}_2) \\
&= a(x, z) + b(y, z).
\end{aligned}
$$

(அ-து) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$

எனவே, $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$ என்பது மெய்யெண், சிக்கலெண் வெக்டர் வெளிகளில் பொருந்தும்.

$$\therefore \quad (x, y) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3$$

என்று வரையறுக்கப்பட்ட இரு வெக்டர்களது உட்பெருக்கம் பின்வரும் பண்புகளை மெய்யெண், சிக்கலெண் வெக்டர் வெளிகளில் கொண்டிருக்கும்.

(i) $(x, x) \geq o$, $(x, x) = o \Longleftrightarrow x = o$

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(iii) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$.

7–3. உட்பெருக்கம் (Inner product) — வரையறை

F என்பது மெய்யெண்கள் அல்லது சிக்கலெண்களைக் கொண்ட களம், $V(F)$ ஒரு வெக்டார் வெளி என்க. பின் $V(F)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வரிசைப்பட்ட சோடி வெக்டார்கள் x, y என்பவற்றிற்கு (x, y) என்ற திசையிலியை

$$(1) \quad (x, x) \geq o, \ (x, x) = o \Longleftrightarrow x = o$$

$$(2) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(3) \quad (ax + by. z) = a\,(x, z) + b\,(y, z)$$

என்ற முறையில் அளிக்கும் சார்பு $V(F)$-ல் ஓர் உட்பெருக்கம் என வரையறுக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$$(ax + by, z) = a\,(x, z) + b\,(y, z)$$

என்பவற்றிலிருந்து கீழ் காணும் முடிவுகளை நிரூபி.

$$\text{(i)} \quad (ax - by, z) = a\,(x, z) - b\,(y, z)$$

$$\text{(ii)} \quad (x, ay + bz) = \bar{a}\,(x, y) + \bar{b}\,(x, z)$$

$$\text{(iii)} \quad (x, ay - bz) = \bar{a}\,(x, y) - \bar{b}\,(x, z)$$

நிரூபணம்

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad (ax - by, z) &= [\{ax + (-b)\,y\}, z] \\ &= a\,(x, z) + (-b)\,(y, z) \\ &= a\,(x, z) - b\,(y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad (x, ay + bz) &= \overline{(ay + bz, x)} \\ &= \overline{a\,(y, x) + b\,(z, x)} \\ &= \bar{a}\,\overline{(y, x)} + \bar{b}\,\overline{(z, x)} \\ &= \bar{a}\,(x, y) + \bar{b}\,(x, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)} \quad (x, ay - bz) &= \overline{[(ay - bz, x)]} \\ &= \overline{[a\,(y, x) - b\,(z, x)]} \\ &= \bar{a}\,\overline{(y, x)} - \bar{b}\,\overline{(z, x)} \\ &= \bar{a}\,(x, y) - \bar{b}\,(x, y)\end{aligned}$$

7–4. உட்பெருக்கு வெளிகள் (Inner product spaces)

ஓர் உட்பெருக்கம் கொண்ட வெக்டார் வெளி $V(F)$ உட்பெருக்கு வெளி எனப்படும்.

மெய்யெண் களத்தில் அமைந்த உட்பெருக்கு வெளி யூக்லிடியன் வெளி (Euclidean space) எனவும், சிக்கலெண் களத்தின் மீது அமைந்த உட்பெருக்கு வெளி அலகு வெளி அல்லது யூனிடரி வெளி (Unitary space) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$V_n\ (c)$ என்ற வெக்டர் வெளி ஓர் அலகு வெளி (unitary space) என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)\ ; \quad x, y \in V, \quad x_i, y_i \in c$$

என்போம்.

$$(x, y) = x_1\,\bar{y}_1 + x_2\,\bar{y}_2 + \ldots + x_n\,\bar{y}_n$$

என வரையறுப்போம்.

உட்பெருக்கு விதிகள் அனைத்தும் பொருந்தினல் $V_n(c)$ ஓர் அலகு வெளி (unitary space) ஆகும்.

$$\text{(i)}\quad (x, x) = x_1\,\bar{x}_1 + x_2\,\bar{x}_2 + \ldots + x_n\,\bar{x}_n$$
$$= |\,x_1\,|^2 + |\,x_2\,|^2 + \ldots + |\,x_n\,|^2 \geq 0$$

$(x, x) = 0$

$$\Rightarrow\ |\,x_1\,|^2 + |\,x_2\,|^2 + \ldots + |\,x_n\,|^2 = 0$$
$$\Rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 0\ ,\ \ldots, x_n = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 0$$

மீண்டும் $x = 0$

$$\Rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots, x_n = 0$$
$$\Rightarrow\ |\,x_1\,|^2 + |\,x_2\,|^2 + \ldots + |\,x_n\,|^2 = 0$$
$$\Rightarrow\ (x, x) = 0$$

$\therefore\ (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(அ-து) $(x, x) \geq 0,\ (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$$\text{(ii)}\quad \overline{(y, x)} = \overline{y_1\,\bar{x}_1 + y_2\,\bar{x}_2 + \ldots + y_n\,\bar{x}_n}$$
$$= \bar{y}_1\,x_1 + \bar{y}_2\,x_2 + \ldots + \bar{y}_n\,x_n$$
$$= x_1\,\bar{y}_1 + x_2\,\bar{y}_2 + \ldots + x_n\,\bar{y}_n$$
$$= (x, y)$$

(அ-து) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(iii) $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in V_n(c)$ எனின்,

$$ax + by = a(x_1, x_2, \ldots, x_n) + b(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= (ax_1 + by_1,\ ax_2 + by_2, \ldots, ax_n + by_n)$$

$$\therefore\ [ax + by, z] = [(ax_1+by, ax_2+by_2, \ldots, ax_n+by_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$$
$$= (ax_1+by_1)\bar{z}_1+(ax_2+by_2)\bar{z}_2+\ldots+(ax_n+by_n)\bar{z}_n$$
$$= (ax_1)\bar{z}_1 + (ax_2)\bar{z}_2 + \ldots + (ax_n)\bar{z}_n + (by_1)\bar{z}_1 + (by_2)\bar{z}_2 + \ldots + (by_n)\bar{z}_n$$
$$= a(x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + \ldots + x_n\bar{z}_n) + b(b_1\bar{z}_1 + b_2\bar{z}_2 + \ldots + b_n\bar{z}_n)$$
$$= a(x, z) + b(y, z)$$

(அ-து) $[ax + by, z] = a(x, z) + b(y, z)$.

உட்பெருக்கு விதிகள் அனைத்தும் $V_n(c)$-க்குப் பொருந்துவதால், $V_n(c)$ ஓர் அலகு வெளி (unitary space) ஆகும்.

7–5. தேற்றம்

மெய்யெண்கள் அல்லது சிக்கலெண்கள் களத்தின் மீது அமைந்த ஒவ்வொரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளியும் ஓர் உட்பெருக்கு வெளியாகும்.

நிரூபணம்

$V(F)$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி, அதன் பரிமாணம் n என்க.

$$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

என்பது $V(F)$ வெளியின் அடிப்படைக் கணம் என்க.

$x, y, z \in V(F)$ எனின்,

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \quad , \quad a_i \in F$$
$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n \quad , \quad b_i \in F$$
$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad , \quad c_i \in F.$$

$V(F)$-ல் உட்பெருக்கம்

$$(x, y) = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \ldots + a_n\bar{b}_n \qquad \text{—(1)}$$

என வரையறுப்போம்.

இனி $V(F)$ ஓர் உட்பெருக்கத்துக்கான விதிகளுக்குப் பொருந்துகிறதா என ஆராய்வோம்.

(i) $(x, x) = a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2 + \dots + a_n \bar{a}_n$
$= |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2$
$\geq o.$

$(x, x) = o$

$\Rightarrow |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = o$
$\Rightarrow a_1 = o,\ a_2 = o,\ \dots, a_n = o$
$\Rightarrow x = o$

மீண்டும், $x = o$

$\Rightarrow a_1 = o,\ a_2 = o, \dots, a_n = o$
$\Rightarrow |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = o$
$\Rightarrow (x, x) = o$

$\therefore (x, x) \geq o,\ (x, x) = o \Longleftrightarrow x = o.$

(ii) $\overline{(y, x)} = \overline{b_1 \bar{a}_1 + b_2 \bar{a}_2 + \dots + b_n \bar{a}_n}$
$= \bar{b}_1 a_1 + \bar{b}_2 a_2 + \dots + \bar{b}_n a_n$
$= a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n$
$= (x, y)$

(iii) $x, y \in V;\ a, b \in F \Rightarrow ax + by \in V$

$\therefore ax + by = a(a_1, a_2, \dots, a_n) + b(b_1, b_2, \dots, b_n)$
$= (aa_1, aa_2, \dots, aa_n) + (bb_1, bb_2, \dots, bb_n)$
$= (aa_1 + bb_1,\ aa_2 + bb_2, \dots, aa_n + bb_n)$
$\in V.$

$z \in V$ எனின்,

$(ax + by, z) = [(aa_1 + bb_1,\ aa_2 + bb_2, \dots, aa_n + bb_n), (c_1, c_2, c_3)]$
$= [(aa_1 + bb_1)\bar{c}_1 + (aa_2 + bb_2)\bar{c}_2 + \dots + (aa_n + bb_n)\bar{c}_n]$
$= [aa_1 \bar{c}_1 + aa_2 \bar{c}_2 + \dots + aa_n \bar{c}_n + bb_1 \bar{c}_1 + bb_2 \bar{c}_2 + \dots + bb_n \bar{c}_n]$
$= [a(a_1 \bar{c}_1 + a_2 \bar{c}_2 + \dots + a_n \bar{c}_n) + b(b_1 \bar{c}_1 + b_2 \bar{c}_2 + \dots + b_n \bar{c}_n)]$
$= [a(x, z) + b(y, z)]$

$\therefore (ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$

அதாவது, (1) உட்பெருக்கு விதிகள் அனைத்திற்கும் பொருந்துகிறது. எனவே, V ஓர் உட்பெருக்கு வெளியாகும்.

7–6. நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளி (Normed vector space)

V ஒரு வெக்டர் வெளி என்க. $x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $\|x\|$ என்று குறியீடு செய்யப்படும் ஒரு மெய்யெண்

(i) $\|x\| > o$, $\|x\| = o \iff x = o$

(ii) $\|ax\| = |a| \|x\|$, $a \in F$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

என்ற முறையில் இருப்பின், V-வெளி ஒரு நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளி (Normed vector space) எனப்படும்.

7–7. தேற்றம்

ஒவ்வோர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியும் நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளியாகும்.

நிரூபணம்

V ஓர் உட்பெருக்கு வெளி என்க. இது ஒரு நீளச்சார்புடைய வெக்டர் வெளி எனின் 7-6- ல் கொடுத்துள்ள மூன்று கட்டுப்பாடு களும் இதற்குப் பொருந்தும்.

$x, y, z \in V$ என்க. பின்,

உட்பெருக்கம் வரையறையின்படி,

$$(x, x) \geq o\ ,\quad (x, x) = o \iff x = o \qquad \text{—(1)}$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \qquad \text{—(2)}$$

$$(ax + by, z) = a\,(x, z) + b\,(y, z). \qquad \text{—(3)}$$

$x \in V$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும்

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \qquad \text{—(4)}$$

(i) $(x, x) = \|x\|^2 > o$ (அ-து) $\|x\| > o$

மேலும், $\|x\| = o \iff (x, x) = o \iff x = o$

அல்லது, $\|x\| = o \iff x = o$

எனவே முதல் கட்டுப்பாடு பொருந்தும்.

(ii)
$$\begin{aligned}
\|ax\|^2 &= (ax, ax) && [\because\ \|x\| = \sqrt{(x, x)}\,]\\
&= a\,(x, ax) && [\because\ a\,(x, ax) = (ax, ax)]\\
&= a\,\overline{(ax, x)} && [\because\ (x, y) = \overline{(y, x)}\,]\\
&= a\,[\overline{a\,(x, x)}]\\
&= a\,\bar{a}\,\overline{(x, x)}\\
&= |a|^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

$\therefore\ \|ax\| = |a|\,\|x\|.$

அதாவது, இரண்டாவது கட்டுப்பாடும் பொருந்தும்.

(iii) $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y)$

$= (x, x + y) + (y, x + y)$ —(3)-ன் படி,

$= \overline{(x + y, x)} + \overline{(x + y, y)}$ —(2)-ன் படி.

$= \overline{(x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y)}$ —(3)-ன் படி.

$= \overline{(x, x)} + \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} + \overline{(y, y)}$

$= (x, x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y)$

$(x + iy) + \overline{(x + iy)} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$

$= 2$ [$(x + iy)$-ன் மெய்ப்பகுதி]

$(x + iy)$-ன் மெய்ப்பகுதி $= x$

$| x + iy | = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore$ $(x + iy)$-ன் மெய்ப்பகுதி $\leq | x + iy |$.

$\therefore$ $\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y)$

$= \|x\|^2 + 2$ [(x, y)-ன் மெய்ப்பகுதி] $+ \|y\|^2$

$\leq \|x\|^2 + 2 | (x, y) | + \|y\|^2$

$\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2$

$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$

$\therefore$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ஆகவே நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளியின் மூன்றாவது கட்டுப்பாடும் பொருந்துகிறது.

ஆக, அனைத்து கட்டுப்பாடுகளும் பொருந்துவதால் $V (F)$ என்பது நீளச்சார்புடைய வெக்டர் வெளியாகும்.

அதாவது, ஒவ்வோர் உட்பெருக்கு வெளியும் ஒரு நீளச் சார்புடைய வெக்டர் வெளி (Normed vector space) ஆகும்.

குறிப்பு :

இதன் மறுதலை மெய்யன்று.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) x, y என்பன ஓர் உட்பெருக்கு வெளியில் யாதேனுமிரு வெக்டர்கள் எனின்,

(i) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$

(ii) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4$ { (x, y)-ன் மெய்ப்பகுதி }

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i)
$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y,\ x+y)\\
&= (x,\ x+y) + (y,\ x+y)\\
&= \overline{(x+y,\ x)} + \overline{(x+y,\ y)}\\
&= \overline{(x,x)+(y,x)} + \overline{(x,y)+(y,y)}\\
&= \overline{(x,x)} + \overline{(y,x)} + \overline{(x,y)} + \overline{(y,y)}\\
&= (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y)\\
&= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)\\
&= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= (x-y,\ x-y)\\
&= (x,\ x-y) - (y,\ x-y)\\
&= \overline{(x-y,\ x)} - \overline{(x-y,\ y)}\\
&= \{\overline{(x,x)-(y,x)}\} - \{\overline{(x,y)-(y,y)}\}\\
&= \overline{(x,x)} - \overline{(y,x)} - \overline{(x,y)} + \overline{(y,y)}\\
&= (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y)\\
&= \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \{\|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2\}\\
&\quad + \{\|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2\}\\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

மேலும்,

(ii)
$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \{\|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2\}\\
&\quad - \{\|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2\}\\
&= 2\{(x,y) + (y,x)\}\\
&= 2\{(x,y) + \overline{(x,y)}\}\\
&= 2[2\{\text{மெய்ப்பகுதி } (x,y)\}]\\
&= 4\{\text{மெய்ப்பகுதி } (x,y)\}
\end{aligned}
$$

(2) மெய்யான உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் x, y என்ற இரு வெக்டர்கள் $\|x\| = \|y\|$ என்ற முறையில் இருப்பின், $(x+y,\ x-y) = 0$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$
\begin{aligned}
(x+y,\ x-y) &= (x,\ x-y) + (y,\ x-y)\\
&= \overline{(x-y,\ x)} + \overline{(x-y,\ y)}
\end{aligned}
$$

$$= \overline{(x, x)} - \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} - \overline{(y, y)}$$
$$= (x, x) - (x, y) + (y, x) - (y, y)$$
$$= (x, x) - (y, y)$$

[$(x, y) = (y, x)$ ∵ மெய்யெண்கள் களத்தில் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி]

$$= \|x\|^2 - \|y\|^2$$

(அ-து) $(x + y, x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$

ஆனல் $\|x\| = \|y\|$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad (x + y, x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 - \|x\|^2$$
$$= 0$$

மாதிரி-1

x, y என்பன அலகு வெளியில் (unitary space) இரு வெக்டர்கள் எனின்,

$$4 (x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2$$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x)$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x, y) - (y, x)$$

$$\therefore \quad \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2 (x, y) + 2 (y, x) \qquad —(1)$$

(1)-ல் $y = iy$ எனின்,

$$\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 = 2 (x, iy) + 2 (iy, x) \qquad —(2)$$

மேலும், $(x, iy) = \overline{(iy, x)}$
$$= \overline{i (y, x)} = \bar{i}\ \overline{(y, x)} = \bar{i} (x, y)$$
$$= -i (x, y)$$

எனவே, சமன்பாடு (2),

$$\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 = -2 i (x, y) + 2 (i y, x)$$
$$= -2 i (x, y) + 2i (y, x) \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2$$
$$= -2 i^2 (x, y) + 2 i^2 (y, x)$$
$$= 2 (x, y) - 2 (y, x) \qquad —(3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3)-ஐக் கூட்டினால்,

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$
$$= 2(x, y) + 2(y, x) + 2(x, y) - 2(y, x)$$
$$= 4(x, y).$$

$$\therefore \quad 4(x, y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

மாதிரி – 2

z மாறியில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி V-ல் உட்பெருக்கம்

$$(x, y) = \int_0^1 x(z)\, y(z)\, dz, \quad x(z), y(z) \in V$$

என்க. பின், $x(z) = z + 3$, $y(z) = z^2 + 2z + 7$ எனின், பின் வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) (x, y)

(ii) $\|x\|$

நிரூபணம்

(i) $(x, y) = \int_0^1 x(z)\, y(z)\, dz$

$$= \int_0^1 (z+3)(z^2+2z+7)\, dz$$

$$= \int_0^1 (z^3 + 5z^2 + 13z + 21)\, dz$$

$$= \left[\frac{z^4}{4} + 5.\frac{z^3}{3} + 13\frac{z^2}{2} + 21z\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} + \frac{13}{2} + 21\right)$$

$$= \frac{3 + 20 + 78 + 252}{12} = \frac{353}{12}$$

$$\therefore \quad (x, y) = \frac{353}{12}.$$

(ii) $\|x\|^2 = (x, x)$

$$= \int_0^1 x(z)\, x(z)\, dz$$

$$= \int (z+3)(z+3)\, dz$$

$$= \int (z^2 + 6z + 9)\, dz$$

$$= \left(\frac{z^3}{3} + \frac{6z^2}{2} + 9z \right)_0^1$$

$$= \tfrac{1}{3} + 3 + 9$$

$$= \frac{37}{3}$$

$\therefore \quad \|x\| = \sqrt{37/3}$

மாதிரி–3

$x = (a_1, a_2)$, $y = (b_1, b_2)$ என்பவை $V_2(F)$-ல் உள்ள இரு வெக்டர்கள் எனின்,

$$(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$$

என்பது V_2 (F)-ல் உள்ள உட்பெருக்கம் என நிரூபி. எனவே, $V_2(F)$-ஐச் சேர்ந்த (3, 4) வெக்டரின் நீளத்தைக் காண்க.

நிரூபணம்

(i) $(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$

ஓர் உட்பெருக்க மெனின், உட்பெருக்கு விதிகள் பொருந்த வேண்டும்.

(1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$

$(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$ (கொள்கை)

$$\therefore \quad (x, x) = a_1 \bar{a}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$$

$$= a_1 \bar{a}_1 + (a_1 + a_2)\overline{(a_1 + a_2)}$$

$$= |a_1|^2 + |a_1 + a_2|^2 \geq 0$$

$\therefore \quad (x, x) \geq 0$

மீண்டும்,

$$(x, x) = 0 \iff |a_1|^2 + |a_1 + a_2|^2 = 0$$

$$\iff a_1 = 0,\ a_2 = 0$$

$$\iff (a_1, a_2) = 0$$

$$\iff x = 0$$

$\therefore \quad (x, x) = 0 \iff x = 0.$

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

$$\overline{(y, x)} = \overline{b_1 \bar{a}_1 + (b_1 + b_2)(\overline{a_1 + a_2})}$$
$$= \bar{b}_1 a_1 + (\overline{b_1 + b_2})(a_1 + a_2)$$
$$= a_1 \bar{b}_1 + (a_1 + a_2)(\overline{b_1 + b_2})$$
$$= a_1 \bar{b}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$$
$$= (x, y)$$

$\therefore \; (x, y) = \overline{(y, x)}$

(3) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$

$z = (c_1, c_2)$ என்க.

$$(ax + by) = a(a_1, a_2) + b(b_1, b_2)$$
$$= (aa_1, aa_2) + (bb_1, bb_2)$$
$$= (aa_1 + bb_1, aa_2 + bb_2)$$

$$\therefore \; (ax+by, z) = [(aa_1+bb_1)\bar{c}_1 + (aa_1+bb_1+aa_2+bb_2)(\bar{c}_1+\bar{c}_2)]$$
$$= a\{a_1 \bar{c}_1 + (a_1+a_2)(\bar{c}_1+\bar{c}_2)\}$$
$$+ b\{b_1 \bar{c}_1 + (b_1 + b_2)(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)\}$$
$$= a(x, z) + b(y, z)$$

$\therefore \; (ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$

எனவே, ஓர் உட்பெருக்கு விதிகள் அனைத்தும் பொருந்துவதால்,

$$(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$$

$V_2(F)$-ல் ஓர் உட்பெருக்கத்தை வரையறுக்கும்.

(ii) மீண்டும், $\|x\|^2 = (x, x)$

$$= a_1 \bar{a}_1 + (a_1 + a_2)(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$$

இங்கு $a_1 = 3, \; a_2 = 4, \; \because \; x = (3, 4)$

$$\therefore \; \|x\|^2 = 3.\bar{3} + (3 + 4)(\overline{3 + 4})$$
$$= 3.3 + (3 + 4)(3 + 4)$$
$$= 3^2 + 7^2 = 9 + 49$$
$$= 58$$

$\therefore \; \|x\| = \sqrt{58}$

மாதிரி– 4

$V_2(R)$ வெக்டர் வெளியில்,

$$(x, y) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

என்ற முறையில் அமையும் பெருக்கம் உட்பெருக்கமாகாது என நிறுவுக.

நிரூபணம்

உட்பெருக்க விதிகள் (மெய்யெண் களத்தில்)

(i) $(x, x) \geq o, \; (x, x) = o \Longleftrightarrow x = o$

(ii) $(x, y) = (y, x)$

(iii) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$

$$\begin{aligned}(x, y) &= a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ &= b_1 + b_2 + a_1 + a_2 \\ &= (y, x)\end{aligned}$$

$\therefore \; (x, y) = (y, x)$

$$\begin{aligned}(ax + by) &= a(a_1, a_2) + b(b_1, b_2) \\ &= (aa_1, aa_2) + (bb_1, bb_2) \\ &= (aa_1 + bb_1, \; aa_2 + bb_2)\end{aligned}$$

$(ax + by, z) = aa_1 + bb_1 + aa_2 + bb_2 + c_1 + c_2$

(வரையறை)

$$a(x, z) = a[a_1 + a_2 + c_1 + c_2]$$
$$b(y, z) = b[b_1 + b_2 + c_1 + c_2]$$

$\therefore \; a(x, z) + b(y, z) = aa_1 + bb_1 + aa_2 + bb_2 + (a + b)(c_1 + c_2)$

$\therefore \; (ax + by, z) \neq a(x, z) + b(y, z)$

எனவே, $(x, y) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$

என்பது $V(R)$ வெளியில் உட்பெருக்கமாகாது.

பயிற்சி 7 – 1

1. ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் x, y இரு வெக்டர்கள் எனின்,

(i) $(ax, y) = a(x, y)$

(ii) $(x, ay) = \bar{a}(x, y)$

என நிறுவுக.

2. இரு உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் $(x, y) = o \; \forall \; y \in V$ எனின், $x = o$ என நிறுவுக.

3. $V_2(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில்

$$(x, y) = a_1 \bar{b}_2 + a_2$$

என்ற முறையில் உள்ள பெருக்கம் உட்பெருக்கமல்ல என நிறுவுக.

4. $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில்,

$$\|ax + by\|^2 = |a|^2 \|x\|^2 + |b|^2 \|y\|^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}(y, x)$$

என நிறுவுக.

5. $(x, y) = 2a_1 \bar{b}_1 + a_1 \bar{b}_2 + a_2 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2$ என்பது $V(F)$ வெக்டர் வெளியிலும்,

$(x, y) = 2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$ என்பது $V(R)$ வெக்டர் வெளியிலும்,

உட்பெருக்கமாகும் என நிறுவுக.

6. சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(c)$ பல்லுறுப்புக் கோவை வெளி என்க.

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\, \overline{y(t)}\, dt \;,\; x(t), y(t) \in V$$

என்பது ஓர் உட்பெருக்கம் என நிறுவுக.

7. பின் வரும் வெக்டரின் நீளம் காண்க.

(i) $x = (1, 2, 3) \in V_3(R)$

(ii) $x = (1, -2, 5) \in V_3(R)$

[விடை: (i) $\sqrt{14}$ (ii) $\sqrt{30}$]

8. அனைத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி V-ல்

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$$

என்ற முறையில் உட்பெருக்கம் இருப்பின்,

$x(t) = t^2 + t - 4, \; y(t) = t - 1$ எனின்,

(i) (x, y), (ii) $\|y\|$ முதலியவற்றைக் காண்க.

[விடை: (i) $11/4$ (ii) $1/\sqrt{3}$]

9. ஓர் உதாரணத்தைக் கூறி ஒவ்வொரு நீளச்சார்புள்ள வெக்டர் வெளியும் ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி அல்ல எனக் காண்பி.

10. $V(F)$ என்பது ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி எனின், $(o, y) = o \ \forall \ y \in V$ என நிரூபி.

7-8. தேற்றம் (Schwarz's Inequality)

ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் x, y என்பன இரு வெக்டர்கள் எனின்,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \text{—(1)}$$

என்ற சமனின்மை மெய்யாகும்.

நிரூபணம்

$V(F)$ ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி என்க. எனவே, உட்பெருக்கு (x, y) பின் வரும் விதிகளுக்குப் பொருந்தும்.

(i) $(x, x) \geq o, \ (x, x) = o \Longleftrightarrow x = o$

(ii) $\overline{(x, y)} = (y, x)$

(iii) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$

$y = o$ எனின்,

$|(x, y)| = \|x\| \, \|y\|$ (∵ இருபக்கமும் பூச்சியம்)

$y \neq o$ எனின், $\|y\| > o$

$\therefore \dfrac{1}{\|y\|^2}$ என்பது F-ல் உள்ள ஒரு திசையிலி.

$z = x - \dfrac{(x, y)}{\|y\|^2} y \in V$ —(2) என்க.

$\therefore$ (i)-ன் படி, $\|z\|^2 \geq o$

$$\therefore \ o \leq \|z\|^2 = (z, z)$$

$$= \left[x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2} y, \ x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2} y \right], \ [(2)\text{-ன் படி}]$$

$$= \left[x, x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2} y \right] -$$

$$\frac{(x, y)}{\|y\|^2} \left[y, x - \frac{(x, y)}{\|y\|^2} y \right]$$

$$= (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2} - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}\left[(y, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2}(y, y) \right]$$

$$= (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2}(x, y) - \frac{(x, y)}{\|y\|^2}(y, x) + \frac{(x, y)}{\|y\|^2}\frac{\overline{(x, y)}}{\|y\|^2}(y, y)$$

$$= (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}\,(x, y)}{\|y\|^2} - \frac{(x, y)\,\overline{(x, y)}}{\|y\|^2} + \frac{(x, y)\,\overline{(x, y)}}{\|y\|^2\,\|y\|^2}(y, y)$$

$$= \|x\|^2 - 2\frac{1}{\|y\|^2}|(x, y)|^2 + \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$$

(அ-து) $\|z\|^2 \leq \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$

$\because\ o \leq \|z\|^2,\quad o \leq \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$

$\therefore\ \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$

எனவே, $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2$

$\therefore\ |(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|.$

குறிப்பு :

(i) அலகு வெளி $V_n(c)$-ல், $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ எனின், பின்

$(x, y) = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \ldots + a_n\bar{b}_n$.

(அ-து) $\|x\|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2$.

தேற்றம் 7-8-ன் படி

$$|a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \ldots + a_n\bar{b}_n|^2 \leq \{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2\} \times \{|b_1|^2 + |b_2|^2 + \ldots + |b_n|^2\}$$

(அ-து) $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i \right|^2 \leq \sum_{1}^{n} |a_i|^2 \sum_{1}^{n} |b_i|^2$

இது கோசி சமனின்மை (Cauchy's inequality) எனப்படும்.

(ii) யுக்ளிடியன் வெளி (Euclidean space) $V_n(R)$-ல்

$(x, y) = \|x\| \|y\| \text{ Cos } \theta.$

θ என்பது x, y வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணம்.

$$\therefore \quad \text{Cos } \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

Schwarz's சமனின்படி,

$$\text{Cos } \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

எனவே, θ என்பது x, y வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் எனின், $\text{Cos } \theta \leq 1$.

7-9. தேற்றம்

$|(x, y)| = \|x\| \|y\| \iff x, y$ ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிறுவுக.

நிரூபணம்

x, y ஒருபடிச் சார்புடையவை என்க.

இனி $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ என நிறுவுவோம்.

x, y ஒருபடிச் சார்புடையவை யாதலின், அவற்றில் ஒன்று மற்ற தன் மடங்காக விளக்கலாம்.

$\therefore \quad x = ay, a \in F$ என்க.

$$\begin{aligned} |(x, y)| &= |(ay, y)| \\ &= |a(y, y)|, \quad \text{(உட்பெருக்கம் 3-ம் விதிப்படி)} \\ &= |a| \|y\|^2 \end{aligned}$$

மேலும், $$\begin{aligned} \|x\| \|y\| &= \|ay\| \|y\| \\ &= |a| \|y\| \|y\| \\ &= |a| \|y\|^2 \qquad (\because \|ay\| = |a| \|y\|) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |(x, y)| = \|x\| \|y\|$$

மறுதலையாக, $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$ என்க.

இனி, x, y ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிறுவுவோம்.

$y = o$ என்றால்,

$$|(x, y)| = \|x\| \|y\|$$

$$\therefore \{(x, y)\} = \{x, o\}$$

பூச்சிய வெக்டரைக் கொண்ட கணம் ஒருபடிச் சார்புடையதாக இருக்குமாதலின், x, y வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையன என்பது தெளிவு.

$y \neq o$ எனின், $\|y\| \geq o$.

$$\because \quad |(x, y)| = \|x\| \|y\|, \qquad \|x\| = \frac{|(x, y)|}{\|y\|}$$

அதாவது, $\left|\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \|x\|$

$$\therefore |(x, z)| = \|x\|, \quad z = \frac{y}{\|y\|} \ (\text{அ}) \ \|z\| = 1. \qquad \text{—(2)}$$

இப்பொழுது,

$\|x - (x, z) z\|^2 = (x - \lambda z, x - \lambda z)$, $\lambda = (x, z)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}
\therefore \|x - (x, z) z\|^2 &= (x, x - \lambda z) - \lambda (z, x - \lambda z) \\
&= (x, x) - \bar{\lambda} (x, z) - \lambda [(z, x) - \bar{\lambda} (z, z)] \\
&= (x, x) - \bar{\lambda} (x, z) - \lambda (z, x) + \lambda \bar{\lambda} (z, z) \\
&= (x, x) - \bar{\lambda} \lambda - \lambda \bar{\lambda} + \lambda \bar{\lambda} \|z\|^2, \quad (\because \lambda = (x, z) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \bar{\lambda} = (z, x)) \\
&= \|x\|^2 - \bar{\lambda} \lambda - \lambda \bar{\lambda} + \lambda \bar{\lambda}, \quad (\because \|z\|^2 = 1) \\
&= \|x\|^2 - \bar{\lambda} \lambda \\
&= \|x\|^2 - |\lambda|^2 \qquad (\because \bar{\lambda} \lambda = |\lambda|^2) \\
&= \|x\|^2 - |(x, z)|^2 \\
&= \|x\|^2 - \|x\|^2, \quad (\because |(x, z)| = \|x\| \ \text{—(2)-ன் படி}) \\
&= o
\end{aligned}$$

$$\therefore \|x - (x, z) z\|^2 = o$$

$$\therefore \|x - (x, z) z\| = o$$

$$\therefore x - (x, z) z = o$$

அல்லது, $x = (x, z) z$

$$\because \quad z = \frac{y}{\|y\|}, \; x = \left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) \frac{y}{\|y\|}$$

$$= \frac{1}{\|y\|} (x, y) \frac{y}{\|y\|}$$

$$= \frac{(x, y)}{\|y\|^2} \, y$$

(அ-து) $x = k\, y, \; k = \frac{(x, y)}{\|y\|^2}$

எனவே, x வெக்டர் y வெக்டரின் ஒரு மடங்காகும்.

$\therefore$ x, y வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவையாம்.

7-10. தேற்றம்

x, y என்பவை ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் உள்ள இரு வெக்டர்கள் எனின், x, y வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரம்,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

என்று வரையறுக்கப்படுமானல், பின் வருபனவற்றை நிரூபி.

(i) $d(x, y) \geq o, \quad d(x, y) = o \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(iv) $d(x, y) = d(x + z, y + z)$

நிரூபணம்

(i) $d(x, y) = \|x - y\| \geq o$

$\|x - y\| = o$ என்பது $x = y$ என்றால் மட்டுமே மெய்யாகும். எனவே, $x = y$ என்றிருந்தால் மட்டுமே, $d(x, y) = o$

(அ-து) $d(x, y) = o \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) $d(x, y) = \|x - y\|$ ($\because$ வரையறை)

$= \|-(y - x)\|$

$= |-1| \, \|y - x\|$, $\quad (\because \|a(x - y)\| = |a| \, \|x - y\|)$

$= \|(y - x)\|$

$= d(y, x)$.

(iii) $d(x, y) = \|x - y\|$
$= \|x - z + z - y\|$
$\leq \|x - z\| + \|z - y\|$ ($\because$ முக்கோண சமனின்மை Triangular inequality)
$\leq d(x, z) + d(z, y)$.

(iv) $d(x, y) = \|x - y\|$
$= \|x + z) - (y + z)\|$
$= d(x + z, y + z)$.

7-11. செங்குத்துமை – வரையறை (Orthogonality – definition)

x, y என்பவை $V(F)$ வெக்டர்வெளியில் உள்ள இரு வெக்டர்கள் என்க. $V(F)$ ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர்வெளி என்போம். $(x, y) = o$ எனின், x, y என்ற இரு வெக்டர்களும் செங்குத்து வெக்டர்கள் எனப்படும்.

அதாவது, $x \perp y \Rightarrow (x, y) = o$

மேலும், $\cos\theta = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \; \|y\|} = o \Rightarrow \theta = 90^\circ$.

(i) செங்குத்துமை சமச்சீர்மையுடையது.

(அ-து) $x \perp y \Rightarrow y \perp x$

$x \perp y \Rightarrow (x, y) = o$
$\Rightarrow \overline{(x, y)} = o$
$\Rightarrow (y, x) = o$
$\Rightarrow y \perp x$.

(ii) ஒவ்வொரு வெக்டரும் பூச்சிய வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகும்.

$$(x, o) = o \quad \forall\, x \in V(F)$$

எனவே, ஒவ்வொரு வெக்டரும் பூச்சிய வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகும்.

(iii) தம்முடன் செங்குத்தான ஒரே வெக்டர் பூச்சிய வெக்டர்.

$x \neq o$ என்க.

மேலும், $x \perp x \Rightarrow (x, x) = o$
$\Rightarrow \|x\|^2 = o$
$\Rightarrow x = o$

எனவே, $x \perp x$ எனின், x பூச்சிய வெக்டராக இருத்தல் வேண்டும்.

7-12. செங்குத்து உள்வெளி – வரையறை.

$V(F)$ என்ற ஓர் உட்பெருக்கு வெளியின் இரு உள்வெளிகள், ஒன்றிலுள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் மற்றதில் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டருடன் செங்குத்தாக இருக்குமாறு இருப்பின் அவை செங்குத்து உள்வெளிகள் (Orthogonal subspaces) எனப்படும்.

(அ-து) $(x, y) = o \quad \forall\, x \in V_1,\ y \in V_2$ எனின், V-ல் உள்ள V_1, V_2 என்ற உள்வெளிகள் செங்குத்து உள்வெளிகள் எனப்படும்.

7-13. செங்குத்துக் கணம் - வரையறை (Orthogonal set – Definition)

$V(F)$ ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர்வெளி, S அதில் ஓர் உட்கணம் என்க. S-ல் உள்ள யாதேனும் இரு வெக்டர்கள் தம்முள் செங்குத் தெனின் S கணம் செங்குத்துக் கணம் எனப்படும்.

அதாவது, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் $(x_i, x_j) = o,\ i \neq j$ என்ற முறையில் இருப்பின், செங்குத்துக் கணம் எனப்படும்.

7-14. செங்குத்து நிரப்பி – வரையறை (Orthogonal Complement – Definition)

V என்ற வெக்டர் வெளியின் உட்கணம் S-ன் செங்குத்து நிரப்பி என்பது S கணத்துடன் செங்குத்தாக இருக்கும் அனைத்து வெக்டர்களது கணமாகும். இது $S^{\perp}$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

$$\therefore \quad S^{\perp} = \{x : x \perp S\}.$$

7-15. அலகு செங்குத்துக் கணம் – வரையறை (Orthonormal Set – Definition)

V என்ற யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியிலுள்ள ஒரு செங்குத்துக் கணத்தில் இருக்கும் அனைத்து வெக்டர்களும் அலகு வெக்டர்களாக விருப்பின், அக்கணம் அலகு செங்குத்து வெக்டர் கணம் (orthonormal set of vectors) எனப்படும்.

அதாவது, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம்

(i) $(x_i, x_j) = o,\ i \neq j$

(ii) $(x_i, x_i) = \|x_i\|^2 = 1$

என்ற முறையில் இருப்பின் S கணம் ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணமாகும்.

7-16. தேற்றம்

V (F) என்ற யூக்ளிட் வெக்டர் வெளியில் பூச்சியமற்ற வெக்டர்களைக் கொண்ட எந்த ஒரு செங்குத்துக் கணமும் ஒருபடிச் சார்பற்று இருக்கும்.

நிரூபணம்

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது V-ல் உள்ள செங்குத்துக் கணம் என்க. $\therefore (x_i, x_j) = o,\ i \neq j.$

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \in V$ —(1) என்க.

பின், $(y, x_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_k \right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i, x_k)$$

$$= a_k (x_k, x_k),\quad K = 1, 2, \ldots, n$$

[S ஒரு செங்குத்துக் கணம். $\therefore (x_i, x_k) = o,\ i \neq k$]

$\because (x_k, x_k) \neq o,$

$$a_k = \frac{(y, x_k)}{(x_k, x_k)},\quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$y = o \in V$, எனின்,

$$a_k = \frac{(o, x_k)}{(x_k, x_k)} = o,\quad k = 1, 2, \ldots, n$$

எனவே, (1)-லிருந்து

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = o$

$\Rightarrow a_1 = o,\ a_2 = o, \ldots, a_n = o.$

எனவே, S கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலையில் இருக்கும்.

7-17. தேற்றம்

ஓர் அலகு செங்குத்து வெக்டர்களது கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலையிலிருக்கும்.

நிரூபணம்

கொள்கைப்படி, $(x_i, x_j) = \left.\begin{array}{l} 1,\ i = j \\ o,\ i \neq j \end{array}\right\}$ —(1)

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = o,\quad a_i \in F$ என்க.

(அ-து) $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = o$

$\therefore \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_r \right) = (o, x_r)$

அதாவது, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_r \right) = (o, x_r)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, (x_i, x_r) = o$$

(1)-ன் படி, $a_r (x_r, x_r) = o$

அதாவது, $a_r \,.\, 1 = 0$

$\therefore \quad a_r = o$

எனவே, $a_1 = o, \; a_2 = o, \ldots, a_n = o$

$\therefore \quad S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற அலகு செங்குத்து வெக்டர்களது கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலையில் இருக்கும்.

7-18. முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம் (Complete orthonormal set)

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில் S ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம் என்க. அது வேறொரு பெரிய கணத்தினுள் அடங்காது இருப்பின், முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம் எனப்படும்.

7-19. செங்குத்து பரிமாணம் (Orthogonal dimension)

ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியிலுள்ள அலகு செங்குத்துக் கணத்தில் இருக்கக் கூடிய வெக்டர்களது மீப்பெரு எண்ணிக்கை வெளியின் செங்குத்து பரிமாணம் எனப்படும்

7-20. தேற்றம்

ஒவ்வொரு முடிவுள்ள பரிமாண உட்பெருக்கு வெளிக்கும் ஓர் அலகு செங்குத்து அடிப்படைக் கணம் உண்டு.

நிரூபணம்

$V(F)$ ஒரு n பரிமாண உட்பெருக்கு வெளி என்க.

$$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

என்பது $V(F)$-ன் அடிப்படை என்க.

B கணத்தில் உள்ள மூலகங்களைக் கொண்டு $V(F)$-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம் அமைப்போம்.

B என்பது $V(F)$-ன் அடிப்படைக் கணம். எனவே, B-ல் உள்ள வெக்டர்கள் பூச்சியமில் வெக்டர்களாகும்.

$$x_1 \neq o \in V \Rightarrow \|x_1\| \neq o$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{\|x_1\|} = y_1 \neq o \in V(F)$$

மேலும் $\|y_1\|^2 = (y_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right)$

$$= \frac{(x_1, x_1)}{\|x_1\|^2} \quad (\because \|x_1\| \in F \text{ ஒரு மெய்யெண்})$$

$$= \frac{\|x_1\|^2}{\|x_1\|^2} = 1.$$

எனவே, $X_1 = \{y_1\}$ ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம், $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$

$$u_2 = x_2 - (x_2, y_1)\, y_1 \in V(F)$$

எனக் கொண்டு X_1 கணத்தை விரிவாக்கலாம்.

$$u_2 = o \text{ எனின்}, \; x_2 = (x_2, y_1)\, y_1 = (x_2, y_1) \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$\therefore$ x_2 என்பது x_1-ன் மடங்காகும்.

ஆனால் B_2 ஒருபடிச் சார்பற்றதாதலின் இது மெய்யன்று.

எனவே, $u_2 \neq o$

$$u_2 \neq o \Rightarrow \frac{u_2}{\| u_2 \|} = y_2 \neq o \in V(F).$$

x_1 கணத்தை விரிவாக்கிப் பெற்ற கணம் $X_2 = \{y_1, y_2\}$

$$(y_2, y_1) = \left(\frac{u_2}{\|u_2\|}, y_1 \right) = \frac{1}{\|u_2\|} (u_2, y_1) = o \quad (\therefore \; u_2 \in V(F), \; Y_1 \in X\,)$$

$$(y_2, y_2) = \left(\frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right) = \frac{(u_2, u_2)}{\|u_2\|^2} = 1$$

$$(y_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right) = \frac{(x_1, x_1)}{\|x_1\|^2} = 1$$

∴ X_2 என்பது $V(F)$-ல் உள்ள ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணமாகும்.

மேலும் $Y_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ வெக்டர்கள் x_2, x_1 என்பனவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். x_2 என்ற வெக்டர் y_1, y_2 வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

மீண்டும் X_2 கணத்தை $X_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ என்ற கணமாக $u_3 = x_3 - (x_3, y_1)\, y_1 - (x_2, y_2)\, y_2 \in V(F)$ என்ற முறையில் அமைக்கலாம்.

$$X_3 = \{y_1, y_2, y_3\}, \quad Y_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \neq o \in V(F)$$

$$(y_3, y_1) = \left(\frac{u_3}{\|u_3\|}, y_1 \right) = \frac{1}{\|u_3\|} (u_3, y_1)$$

$$= o \quad [\because \; u_3 \in V(F), y_1 \in X_1]$$

$$(y_3, y_2) = \left(\frac{u_3}{\|u_3\|}, y_2 \right) = \frac{1}{\|u_3\|} (u_3, y_2)$$

$$= o \quad [\because \; u_3 \in V(F), \; y_2 \in X_2]$$

$$(y_3, y_3) = \left(\frac{u_3}{\|u_3\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right)$$

$$= \frac{1}{\|u_3\|^2} (u_3, u_3) = 1.$$

எனவே, $X_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம். y_3 என்பது x_3, x_2, x_1 வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். x_3 என்பது y_3, y_2, y_1 வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

இவ்வாறே, மேற்குறிப்பிட்ட முறையில் தொடர்ந்தால்

$$X_m = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

என்ற ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம் அமைக்கலாம். $y_1, y_2, \ldots, y_m$ என்ற வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றும் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை. மேலும் $x_1, x_2, \ldots, x_m$ என்ற வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றும் $y_1, y_2, \ldots, y_m$ வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். இனி,

$$u_{m+1} = x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} a_i\, y_i \;\; \in V(F) \text{ என்க.}$$

இதில் u_{m+1} என்பது X_m-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் செங்குத்தாக இருக்குமாறு $a_1, a_2, \ldots, a_m$ என்ற திசையிலிகளைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

(அது) $(u_{m+1}, y_j) = [X_{m+1} - \Sigma a_i y_i, y_j] = o, \; j = 1, 2, \ldots, m$

$$\Rightarrow \; (X_{m+1}, y_j) - \sum_{i=1}^{m} a_i (y_i, y_j) = o$$

$$\Rightarrow \; (X_{m+1}, y_j) - a_j = o$$

$$\Rightarrow \; a_j = (X_{m+1}, y_j), \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

எனவே,

$$u_{m+1} = x_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} (x_{m+1}, y_i) y_i \qquad —(1)$$

என்ற வெக்டர் X_m-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் செங்குத்தாய் உள்ளது. மேலும் $u_{m+1} \neq o$.

$\because$ $u_{m+1} = o$ எனின், u_{m+1} என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_m$ என்ற வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். இது B ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலையில் உள்ளது என்பதற்கு எதிர்மறையாகும். எனவே, $u_{m+1} \neq o$.

$$\therefore \; X_{m+1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}\}, \; y_{m+1} = \frac{u_{m+1}}{||u_{m+1}||}$$

$$(y_{m+1}, y_j) = \left(\frac{u_{m+1}}{||u_{m+1}||}, \; y_j \right), \; j = 1, 2, \ldots, m$$

$$= \frac{1}{||u_{m+1}||} (u_{m+1}, \; y_j) = o \qquad (\because \; (1)\text{-ன் படி})$$

$$(y_{m+1}, y_{m+1}) = \left(\frac{u_{m+1}}{||u_{m+1}||}, \; \frac{u_{m+1}}{||u_{m+1}||} \right) = \frac{1}{||u_{m+1}||^2} (u_{m+1}, u_{m+1}) = 1.$$

எனவே, X_{m+1} ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணமாகும். $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$ என்பவை $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை. $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ என்பவை $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$ வெக்டர்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை.

எனவே, X_m ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம் எனின், X_{m+1} என்பதும் ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணமாகும்.

தொகுப்பாய்வு முறை (Induction method) யில்

$$X_n = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$$

என்ற $V(F)$-ல் உள்ள ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம் நமக்குக் கிடைக்கின்றது. இதன் ஒத்த அடிப்படைக் கணம் (Corresponding basis) $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ஆகும். $y_1, y_2, \ldots, y_n$ என்பவை $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கை; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கை. மேலும் $V(F)$ வெளியில் உள்ள மீப்பெரு அலகு செங்குத்துக் கணமாகவும் X_n உள்ளது. $\because$ $X_n \subset V(F)$ ஒருபடிச் சார்பற்றது. மேலும் $V(F)$-ன் பரிமாணம் n ஆதலின் $V(F)$-ல் உள்ள எந்த ஒருபடிச் சார்பற்ற கணமும் n மூலகங்களுக்கு மேல் கொண்டிராது. எனவே X_n ஒரு முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணமாகும் (Complete orthonormal set).

இவ்வாறு, $V(F)$-ல் உள்ள ஓர் அடிப்படைக் கணத்தை முற்றிய அலகு கணமாக மாற்றும் முறை கிராம்-சுமிது செங்குத்தாக்கும் முறை (Gram-Schmidt orthogonalisation process) எனப்படும்.

குறிப்பு :

$X_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ என்ற அலகு செங்குத்துக் கணத்தை $V(F)$-ன் அடிப்படைக் கணமாகவும் கொள்ளலாம்.

X_n ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலையில் உள்ளது. மேலும் $V(F)$-ல் உள்ள x என்ற எந்த ஒரு வெக்டரும் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பனவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கை, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை $y_1, y_2 \ldots, y_n$ என்பனவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்.

எனவே X_n எனும் கணம் $V(F)$ வெளியின் ஓர் அடிப்படைக் கணமாகும். இது அலகு செங்குத்து அடிப்படை (Orthonormal basis) எனப்படும்.

7-21. தேற்றம்

V ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது முடிவுள்ள அலகு செங்குத்துக் கணம் (finite orthonormal set) எனின், பின்வருவன சமமானவை (equivalent).

1. S ஒரு முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம்.
2. $x \in V, (x, x_i) = o, \ i = 1, 2, \ldots, n$ எனின், $x = o$.
   (அ-து) $x \perp S \Rightarrow x = o$.
3. S கணம் வெக்டர் வெளி V-ஐப் பிறப்பிக்கும்.
   (அ-து) $L(S) = V$.

4. $x \in V$ எனின், x என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பனவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும். (அ-து) $x = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\, x_i$,

5. $x, y \in V$ எனின், $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\,(x_i, y)$.

6. $x \in V$ எனின், $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\,(x, x_i)\,|^3$.

நிரூபணம்

1, S ஒரு முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம் என்க.

2. $(x, x_i) = o \Rightarrow x = o$ என நிறுவுவோம்.

$x \neq o,\ (x, x_i) = o$ எனின்,

பின் $\frac{x}{\|x\|}$ என்பது ஓர் அலகு வெக்டர் (unit vector). மேலும் $\frac{x}{\|x\|}$ ஒவ்வொரு x_i உடனும் செங்குத்தாக இருக்கும்.

$$\therefore \quad S_1 = \left\{ x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

என்ற விரிவாக்கப்பட்ட கணம் அலகு செங்குத்துக் கணமாகும். S ஒரு முற்றிய செங்குத்துக் கணம் என்ற கூற்றுக்கு இது எதிர் மறையாகும். $\therefore \quad x = o.$

3. அடுத்து $L(S) = V$ என நிறுவுவோம்.

$L(S) \subseteq V$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனவே $V \subseteq L(S)$ என நிறுவுவது போதுமானது.

$\therefore$ V-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரும் S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கையெனின், $V \subseteq L(S)$.

இயலுமெனின் $x \in V$ என்பது S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒரு படிச் சேர்க்கை அல்ல எனக் கொள்வோம்.

(அ-து) $x \neq c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,\ c_i = (x, x_j)$

(அ-து) $x \neq \Sigma\,(x, x_i)\, x_i$

$\therefore$ $x - \Sigma\,(x, x_i)\, x_i$ ஒரு பூச்சிய வெக்டர் அல்ல.

மீண்டும், $[x - \sum_{1} (x, x_i)\, x_i, x_j]$

$$= (x, x_j) - [\sum_{i=1}^{n} (x, x_i)(x_i, x_j)]$$

$$= (x, x_j) - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\, \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = o, i \neq j \quad = 1, i = j$$

$$= (x, x_j) - (x, x_j)\cdot 1 = 0$$

இதிலிருந்து, பூச்சியமில் வெக்டர்

$$x - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\, x_i$$

ஒவ்வொரு வெக்டர் x_j-க்கும் செங்குத்தாகும். எனவே, கட்டுப்பாடு (2)-ன்படி,

$$x - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)(x_i) = 0$$

அல்லது, $x = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\, x_i$

= S-ல் உள்ள மூலகங்களது ஒருபடிச் சேர்க்கை.

$\therefore \quad V \subseteq L(S)$

ஏற்கெனவே, $L(S) \subseteq V$ என்பது தெளிவு.

$\therefore \quad L(S) = V.$

4. $L(S) = V$. இனி x என்பது $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பனவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக விளக்கலாம்.

$\because \quad L(S) = V$, x = S-ன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகும்

$$= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$
$$= \sum c_i x_i$$

$$\therefore \quad (x, x_j) = [\sum (c_i x_i), x_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \, \delta_{ij}$$

$$= c_j \, \delta_{jj} = c_j \quad \left[\because \delta_{ij} = 0, \; i \neq j \atop \qquad = 1, \; i \neq j \right]$$

$$\therefore \quad (x, x_i) = c_i$$

எனவே, $x = \Sigma \, c_i \, x_i = \Sigma \, (x, x_i) \, x_i$.

5. அடுத்து, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \; (x_i, \; y); \; x, \; y \in V$ என நிறுவுவோம்.

கட்டுப்பாடு (4)-ன் படி,

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \, x_i$$

$$\therefore \; (x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \, x_i, \; \Sigma \; (y, x_j) \, x_j \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x, x_i) \; \overline{(y, x_j)} \; (x_i, x_j)$$

j-ஐச் சார்ந்து கூட்டினால்,

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = 0, \; j \neq i$$
$$= 1, \; j = i$$

$$\therefore \; (x \; y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \; \overline{(y, x_i)}.1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \, (x_i, y).$$

6. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | \, (x, x_i) \, |^2$ என நிறுவுவோம்.

கட்டுப்பாடு (5)-ன்படி,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \; (x_i, y)$$

$y = x$ எனின்,

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\,(x_i, x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)\,\overline{(x, x_i)}$$

$$\therefore \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2.$$

எனவே, S ஒரு முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம் எனின், கட்டுப்பாடு (2) உண்மையாகும்.

கட்டுப்பாடு (2) உண்மை $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6).

இனி, S ஒரு முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம் என நிறுவுவோம்.

S ஒரு முற்றிய அலகு செங்குத்துக் கணம் அல்ல எனின், S_1 என்ற பெரிய கணம் S என்ற அலகு செங்குத்துக் கணத்துக்கு இருக்கும்.

(அ-து) $x \in V$ என்ற ஒரு பூச்சியமில் அலகு வெக்டர் S-ல் உள்ள மூலகங்களுடன் செங்குத்தாக இருக்கும்,

(அ-து) $(x, x_i) = 0 \quad \forall i$

ஆனால், $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2 = 0$

$\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. இது x ஒரு பூச்சியமில் வெக்டர் என்ற கூற்றுக்கு எதிர்மறையானது.

எனவே, S ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம்.

7-22. தேற்றம்

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி V-ல் ஓர் அலகு செங்குத்துக் கணம், $x \in V$ என்க.

பின், $\sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2 \leq \|x\|^2$

இது பெஸ்ஸல் சமனின்மை (Bessel's inequality) எனப்படும்.

நிரூபணம்

$V(F)$ ஒரு வெக்டர்வெளி, $S \in V$.

$$\therefore \quad z = x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in V(F) \quad \text{—(1)}, \quad a_i = (x, x_i)$$

$V(F)$ ஓர் உட்பெருக்கு வெளியாதலின்,

$o \leq \|z\|^2$ (உட்பெருக்கு வெளியின் விதி 1-ன்படி)

$$\|z\|^2 = (z, z) = [x - \sum_{1}^{n} a_i x_i, \ x - \sum_{1}^{n} a_i x_i]$$

$$= (x, x - \Sigma a_i x_i) - (\sum a_i x_i, x - \sum a_i x_i)$$

$$= \overline{(x - \sum a_i x_i, x)} - \sum a_i (x_i, x - \sum a_i x_i)$$

$$= (x, x) - \overline{(\sum a_i x_i, x)} - \sum a_i (x_i, x) - \sum a_i (x_i, - \sum a_i x_i)$$

$$= \|x\|^2 - \sum \bar{a}_i \overline{(x_i, x)} - \sum a_i \overline{(x, x_i)} - \sum_{i=1}^{n} a_i [- \Sigma \bar{a}_j (x_i, x_j)]$$

$$= \|x\|^2 - \sum \bar{a}_i (x, x_i) - \sum a_i \bar{a}_i + \Sigma a_i \bar{a}_i (x_i, x_i)$$

$$= \|x\|^2 - \Sigma \bar{a}_i a_i - \Sigma a_i \bar{a}_i + \Sigma a_i \bar{a}_i$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

$$\therefore \quad \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \geq o$$

(அ-து) $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq \|x\|^2$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

அடுத்து z என்பது $x_i \in S$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகும்.

$$(z, x_j) = (x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_j), \quad j = 1, 2, ..., n$$

$$= (x, x_j) - \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i, x_j)$$

$$= (x, x_j) - a_j (x_j, x_j)$$
$$= (x, x_j) - a_j \quad [\because \ (x_j, x_j) = 1]$$
$$= (x, x_j) - (x, x_j)$$
$$= 0$$

$\therefore$ z என்பது $x_j \in S$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகும்.

எனவே, $\sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2 \leq \|x\|^2$.

மாதிரி—1

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ என்றிருந்தால் மட்டுமே, மெய்யெண்களைக் கொண்ட உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் உள்ள x, y என்ற இரு வெக்டர்கள் செங்குத்தானவை என நிரூபி. இது சிக்கலெண் உட்பெருக்கு வெளியில் உண்மையல்ல எனவும் நிரூபி.

நிரூபணம்

$V(F)$ மெய்யெண்களைச் கொண்ட உட்பெருக்கு வெளி (யுக்ளிடியன் வெளி), $x, y \in V$ என்க.

$x, y \in V$ செங்குத்தானவை என்க. (அ-து) $(x, y) = 0$

இனி, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ என நிறுவுவோம்.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y)$$
$$= (x, x + y) + (y, x + y)$$
$$= (x+y, x) + (x + y, y), \quad [\because \ (x, x+y) = (x+y, x),$$
$V(F)$ ஒரு யூக்ளிடியன் வெளி]
$$= (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y)$$
$$= \|x\|^2 + o + o + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad [\because \ (x, y) = (y, x) = o$$ யூக்ளிடியன் வெளியில்]

மீண்டும் $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ என்க.

இனி $(x, y) = o$ என நிறுவுவோம்.

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

அதாவது, $\|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\Rightarrow \ 2(x, y) = o$

$\Rightarrow \ (x, y) = o$

$\Rightarrow \ x, y$ செங்குத்தானவை

$$\therefore \quad (x, y) = o \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

இது பித்தகோரியன் தேற்றம் (Pythagorean theorem) எனப்படும்.

அடுத்து $V(F)$ ஓர் அலகு வெக்டர்வெளி (அ-து) சிக்கலெண் களத்தில் அமைந்த உட்பெருக்கு வெக்டர்வெளி எனின், பின்

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow (x, x + y) + (y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow \overline{(x + y, x)} + \overline{(x + y, y)} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow \overline{(x, x)} + \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} + \overline{(y, y)} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow (x, x) + \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow \|x\|^2 + \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\Rightarrow \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)} = o$$
$$\Rightarrow (x, y) + \overline{(x, y)} = o$$
$$\Rightarrow 2 \text{ மெய்ப்பகுதி } (x, y) = o$$
$$\Rightarrow (x, y) \neq o.$$

(அ-து) x, y செங்குத்து வெக்டர்கள் அல்ல. எனவே, சிக்கலெண் களத்தில் அமைந்த உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில்,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow (x, y) = o$$

என்ற கட்டுப்பாடு பொருந்தாது.

மாதிரி–2

$V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாண உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் W_1, W_2 என்பவை உள்வெளிகள் எனின்,

$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$z \in (W_1 + W_2)^\perp$ என்க.

பின் z வெக்டர் $(W_1 + W_2)$-ல் உள்ள அனைத்து வெக்டர்களுடனும் செங்குத்தாக இருக்கும்.

(அ-து) $z \perp (W_1 + W_2)$

(அ-து) $[z, (x, y)] = o, \ x \in W_1, \ y \in W_2$

$\therefore \ (z, x) + (z, y) = o$

(அ-து) $(z, x) = o, \ x \in W_1$

$(z, y) = o, \ y \in W_2.$

எனவே, $z \in W_1^{\perp}$, $z \in W_2^{\perp}$

$$\therefore \quad z \in (W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp})$$

எனவே, $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset (W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp})$ —(1)

மீண்டும், $z \in W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$ என்க.

$\therefore \quad z \in W_1^{\perp}$, $z \in W_2^{\perp}$

$$\therefore \quad (z, x) = o, \; x \in W_1$$
$$(z, y) = o, \; y \in W_2$$

$$\therefore \quad (z, x) + (z, y) = o, \; x \in W_1, \; y \in W_2.$$

(அ-து) $(z, x + y) = o$, $x + y \in W_1 + W_2$

(அ-து) $z \in (W_1 + W_2)^{\perp}$

எனவே, $W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \subset (W_1 + W_2)^{\perp}$ —(2)

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து

$$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}.$$

மாதிரி–3

கிராம்–சுமிது செங்குத்து முறையைப் பயன்படுத்தி $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ என்ற அடிப்படையைக் கொண்ட $V_3(R)$ வெக்டார் வெளியின் ஓர் அலகு செங்குத்து அடிப்படைக் கணத்தைக் காண்க.

நிரூபணம்

$x = (a_1, a_2, a_3)$, $y = (b_1, b_2, b_3) \in V$ எனின், $V_3(R)$-ல் உட்பெருக்கு

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

$B = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1)$ என்பது $V_3(R)$-ன் அடிப்படை.

B-ஐச் சார்ந்த $V_3(R)$-ன் அலகு செங்குத்து அடிப்படை (orthonormal basis),

$B_1 = \{y_1, y_2, y_3\}$ என்க.

$$\therefore \quad y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{(1, 0, 0)}{\sqrt{(x_1, x_1)}} = \frac{(1, 0, 0)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = (1, 0, 0)$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= x_2 - (x_2, y_1)\, y_1 \\
&= (1, 1, 0) - [(1, 1, 0), (1, 0, 0)]\ (1, 0, 0) \\
&= (1, 1, 0) - (1 + 0 + 0)\ (1, 0, 0) \quad (\because (1, 1, 0)\ (1, 0, 0) \\
&= (1, 1, 0) - (1, 0, 0) \qquad\qquad\qquad = 1.1 + 1.0 + 0.0 \\
&= (0, 1, 0). \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 1 + 0 + 0)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad y_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(0, 1, 0)}{\sqrt{(u_2, u_2)}} \quad (\because\ (u_2, u_2) = [0, 1, 0], [0, 1, 0] = 0 + 1 + 0 = 1)
$$

$$
= \frac{(0, 1, 0)}{1} = (0, 1, 0).
$$

மீண்டும்,

$$
\begin{aligned}
u_3 &= x_3 - (x_2, y_1)\, y_1 - (x_3, y_2)\, y_2 \\
&= (1, 1, 1) - [(1, 1, 0), (1, 0, 0)]\ (1, 0, 0) - [(1, 1, 1)\ (0, 1, 0)]\ (0, 1, 0) \\
&= (1, 1, 1) - (1, 0, 0)\ (1, 0, 0) - (0, 1, 0)\ (0, 1, 0) \\
&= (1, 1, 1) - (1, 0, 0) - (0, 1, 0) \\
&= (0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad y_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{(0, 0, 1)}{\sqrt{(u_3, u_3)}} = \frac{(0, 0, 1)}{1} = (0, 0, 1)
$$

$\therefore$ அலகு செங்குத்து அடிப்படைக் கணம்

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

மாதிரி–4

$V\ (F)$ உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியினது உள்வெளிகள் W_1, W_2 எனின்,

$$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$z \in (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ என்க.

$\therefore\quad (z, x) = o,\ x \in W_1 \cap W_2$

$\therefore\quad x \in W_1,\ x \in W_2.$

(அ-து) $(z, x) = o,\ x, \in W_1\ ;\ (z, x) = o,\ x \in W_2$

$(z_1, x) = o, \; z_1 \in W_1^{\perp}$
$(z_2, x) = o, \; z_2 \in W_2^{\perp}$ எனின், $(z, x) = o$
$\Rightarrow \; (z, x) = (z_1, x) + (z_2, x) = o$
$\Rightarrow \; (z, x) = (z_1 + z_2, x) = o$
$\Rightarrow \; z = z_1 + z_2, \; z_1 \in W_1^{\perp}, \; z_2 \in W_2^{\perp}$
$\Rightarrow \; z \in W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

$$\therefore \; (W_1 \cap W_2)^{\perp} \subset W_1^{\perp} + W_2^{\perp} \qquad \text{—(1)}$$

மீண்டும், $z \in W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$ என்க.

$\therefore \; z = z_1 + z_2, \; z_1 \in W_1^{\perp}, \; z_2 \in W_2^{\perp}$
$\Rightarrow \; (z, x) = (z_1 + z_2, x) = (z_1, x) + (z_2, x)$
$(z_1, x) = o, \; (z_2, x) = o$ எனின்,
$(z, x) = o$ என்றாகும்.

ஆனால், $x \in W_1, \; z_1 \in W_1^{\perp}$ என்றால், $(z_1, x) = o$

இவ்வாறே, $x \in W_2, z_2 \in W_2^{\perp}$ எனின், $(z_2, x) = o$

$\therefore \; x \in W_1, \; x \in W_2$ எனின், $(z, x) = o$

அதாவது, $x \in W_1 \cap W_2$ எனின், $(z, x) = o$

$\therefore \; z \in (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

எனவே, $W_1^{\perp} + W_2^{\perp} \subset (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ —(2)

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து

$$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}.$$

மாதிரி-5

$$\|ax + by\|^2 = \|ax\|^2 + \|by\|^2$$

என்றால் மட்டுமே சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியிலுள்ள x, y என்ற வெக்டர்கள் செங்குத்தாகும்.

நிரூபணம்

x, y வெக்டர்கள் செங்குத்தானவை என்க.

இனி $\|ax + by\|^2 = \|ax\|^2 + \|by\|^2$ என நிறுவுவோம்.

$\because \; x, y$ செங்குத்தானவை, $(x, y) = o$

$$\begin{aligned} \|ax + by\|^2 &= (ax + by, \; ax + by) \\ &= (ax, ax) + (ax, by) + (by, ax) + (by, by) \\ &= \|ax\|^2 + (ax, by) + \overline{(ax, by)} + \|by\|^2 \\ &= \|ax\|^2 + \|by\|^2 + 2\,\{\text{மெய்ப்பகுதி } (ax, by)\} \\ &= \|ax\|^2 + \|by\|^2 + 2\,\text{மெய்ப்பகுதி } a\bar{b}\,(x, y) \qquad \text{—(1)} \\ &= \|ax\|^2 + \|by\|^2, \; [\because \; (x, y) = o] \end{aligned}$$

மீண்டும், $\|ax + by\|^2 = \|ax\|^2 + \|by\|^2$ என்க.

இனி $(x, y) = o$ அதாவது x, y செங்குத்தானவை என நிறுவு வோம்.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$\|ax\|^2 + \|by\|^2 + 2 \text{ மெய்ப்பகுதி } a\bar{b}\,(x, y) = \|ax\|^2 + \|by\|^2$$

$$\therefore \quad 2 \text{ மெய்ப்பகுதி } a\bar{b}\,(x, y) = o$$

(அ-து) $(x, y) = o$.

எனவே, x, y வெக்டர்கள் செங்குத்தானவையாகும்.

மாதிரி-6

ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளியில் $\{x, y\}$ என்பது அலகு செங்குத்துக் கணம் எனின், x, y வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

நிருபணம்

$\{x, y\}$ அலகு செங்குத்துக் கணம் ஆதலின்,

$\|x\|^2 = (x, x) = 1, \quad \|y\|^2 = (y, y) = 1.$

மேலும் $(x, y) = o$.

வரையறையின்படி, x, y வெக்டர்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $\|x - y\|$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}\therefore \quad \|x - y\|^2 &= (x-y,\ x-y)\\ &= (x,\ x-y) - (y, x-y)\\ &= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y)\\ &= 1 - 0 - 0 + 1\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \|x - y\| = \sqrt{2}.$$

எனவே, x, y வெக்டர்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $\sqrt{2}$.

மாதிரி-7

$\{(1, 0, i),\ (2, 1, 1 + i)\}$ என்ற கணத்தினுல் பிறப்பிக்கப் படும் $V_3\,(c)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளியான W-ன் அலகு செங்குத்து அடிப்படைக் கணம் காண்க.

நிரூபணம்

$x_1 = (1, 0, i)$, $x_2 = (2, 1, 1 + i)$ என்க.

$B = \{ x_1, y_1 \}$ எனின், $L(B) = W$.

$\because$ x_1-ஐ x_2-ன் திசையிலி மடங்காக விளக்க முடியாது. எனவே, $\{ x_1, y_1 \}$ ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலையில் இருக்கும்.

எனவே, B கணம் W-ன் அடிப்படையாகும்.

$S = \{y_1, y_2\}$ என்பது B-ஐச் சார்ந்த W-ன் அலகு செங்குத்துக் கணம் என்க.

$$\therefore \quad y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{(1, 0, i)}{\sqrt{\{(1, 0, i), (1, 0, i)\}}}$$

$$= \frac{(1, 0, i)}{\sqrt{\{1.\bar{1} + o.\bar{o} + i\,\bar{i}\}}} = \frac{(1, 0, i)}{\sqrt{(1 + 1)}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

அடுத்து,

$$u_2 = x_2 - (x_2, y_1)\, y_1$$

$$= (2, 1, 1 + i) - \left\{(2, 1, 1+i), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2, 1, 1 + i) - \left\{\frac{2}{\sqrt{2}} + o + \frac{(1 + i)\,\bar{i}}{\sqrt{2}}\right\} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= (2, 1, 1 + i) - \left(+ \sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2, 1, 1 + i) - \left(\frac{2 + i - 1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2, 1, 1 + i) - \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2, 1, 1 + i) - \left(\frac{1 + i}{2}, o, \frac{-1 + i}{2}\right)$$

$$= \left\{2 - \frac{1 + i}{2}, 1 - o, 1 + i - \frac{i - 1}{2}\right\}$$

$$= \left\{\frac{3 - i}{2}, 1, \frac{3 + i}{2}\right\}$$

$$\therefore \quad \|u\|^2 = (u_2, u_2) = \left\{ \left(\frac{3-i}{2}, 1, \frac{3+i}{2} \right), \left(\frac{3-i}{2}, 1, \frac{3+i}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{3-i}{2} \cdot \overline{\frac{3-i}{2}} + 1.\bar{1} + \frac{3+i}{2} \cdot \overline{\frac{3+i}{2}}$$

$$= \frac{3-i}{2} \cdot \frac{3+i}{2} + 1.\bar{1} + \frac{3+i}{2} \cdot \frac{3-i}{2}$$

$$= \frac{9-i^2}{4} + 1 + \frac{9-i^2}{4} = \frac{9+1}{4} + 1 + \frac{9+1}{4}$$

$$= \frac{10}{4} + 1 + \frac{10}{4} = \frac{10+4+10}{4} = \frac{24}{4}$$

$$= 6$$

$$\therefore \quad y_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(\frac{3-i}{2}, 1, \frac{3+i}{2} \right)}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3-i}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3+i}{2\sqrt{6}}$$

எனவே, W உள்வெளியின் அலகு செங்குத்து அடிப்படைக் கணம்

$$S = \{ y_1, y_2 \}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{3-i}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3+i}{2\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

பயிற்சி 7 – 2

1. கிராம்–சுமிது செங்குத்தாக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தி $V_3(R)$-க்கு ஓர் அலகு செங்குத்து அடிப்படையைக் காண்க.

(x_1, x_2, x_3) என்பது ஓர் அடிப்படை என்க.

(i) $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 0, -1)$, $x_3 = (0, 3, 4)$

(ii) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (0, 1, 1)$, $x_3 = (0, 0, 1)$.

[விடை: (i) $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o ; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (o, 1, o,) \right\}$.

$$\text{(ii)}\quad \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(o, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

2. $(1, 2, 3, -1, 2)$, $(2, 4, 7, 2, -1)$ என்ற வெக்டர்களால் பிறப்பிக்கப்படும் உள்வெளி W என்க. பின் $W^{\perp}$-ன் அடிப்படைக் கணம் காண்க.

3. $V(F)$ என்ற உட்பெருக்கு வெளியின் ஓர் உள்வெளி W என்க. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது W-ன் அடிப்படை எனின்,

$$(y, x_i) = o, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

என்றால் மட்டுமே $y \in W^{\perp}$ என நிறுவுக.

4. x வெக்டர் y வெக்டருடன் செங்குத்தெனின், x-ன் ஒவ்வொரு திசையிலி மடங்கும் y வெக்டருடன் செங்குத்தாகும் என நிறுவுக.

5. $\{x, y\}$ என்பது அலகு செங்குத்துக் கணம் எனின், x, y வெக்டர்களுக்கிடையே யுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

6. $V_4(R)$-ன் ஓர் உள்வெளி W என்க. $B = \{(1, 2, 3, -2), (2, 4, 5, -1)\}$ என்பது W-ஐப் பிறப்பிக்கும் எனின், $W^{\perp}$-க்கு ஓர் அடிப்படை காண்க.

7. $V(F)$ ஒரு முடிவுள்ள பரிமாணமுள்ள உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது V-ல் உள்ள அலகு செங்குத்துக் கணம் என்க. பின் $z \in V$, $\sum_{i=1}^{n} |(x_i, z)|^2 = \|z\|^2$ எனின், S கணம் V-க்கு ஓர் அடிப்படை கணம் என நிரூபி.

8. சிறப்பு மூலங்கள், வெக்டர்கள்

(Characteristic roots, vectors)

8-1. சிறப்பு மூலங்களும் வெக்டர்களும் – வரையறை

F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி V-ல் T ஒருபடிச் செயலி என்க. பின் $x \in V(F)$ என்ற பூச்சியமில் வெக்டர்,

$$T(x) = \lambda(x)$$

என்ற முறையில் இருப்பின், $\lambda \in F$ என்ற திசையிலி T என்ற ஒரு படிச் செயலியின் **சிறப்பு மூலம்** (Characteristic root) எனப்படும்.

F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி V-ல் T ஒருபடிச் செயலி என்க. பின் $\lambda \in F$ என்ற ஒரு திசையிலி,

$$T(x) = \lambda x$$

என்ற முறையில் இருப்பின், $x \in V(F)$ என்ற பூச்சியமில் வெக்டர் T என்ற ஒருபடிச் செயலியின் **சிறப்பு வெக்டர்** (Characteristic vector) எனப்படும்.

x வெக்டர், சிறப்பு மூலம் λ-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெக்டர் எனப்படும்.

குறிப்பு–1

சிறப்பு மூலம் λ-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெக்டர் x எனின், x வெக்டரின் ஒவ்வொரு திசையிலி பெருக்கியும் λ-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டராகும்.

$$\because \quad T(x) = \lambda(x)$$
$$T(ax) = a\,T(x)$$
$$= a(\lambda x)$$
$$= \lambda(ax)$$

எனவே, மேற்குறிப்பிட்டது உண்மை என்றாகிறது.

குறிப்பு-2

ஒரு சிறப்பு வெக்டரைச் சார்ந்து இரு வெவ்வேறு சிறப்பு மூலங்களிரா.

இயலுமெனின், λ, λ_1 என்பவை x என்ற ஒரு சிறப்பு வெக்டரைச் சார்ந்த இரு வெவ்வேறு சிறப்பு மூலங்கள் என்க.

பின் வரையறையின்படி,

$$T(x) = \lambda x$$
$$T(x) = \lambda_1 x$$
$$\therefore \quad \lambda x = \lambda_1 x \Rightarrow (\lambda - \lambda_1) x = o$$

x சிறப்பு வெக்டராதலின், $x \neq o$

$$\therefore \quad \lambda - \lambda_1 = o$$
$$\therefore \quad \lambda = \lambda_1$$

எனவே, ஒரு சிறப்பு வெக்டரைச் சார்ந்து இரு வெவ்வேறு சிறப்பு மூலங்களிரா.

ஆனால் குறிப்பு-1-ன் படி ஒரு சிறப்பு மூலத்தைச் சார்ந்து வெவ்வேறு சிறப்பு வெக்டர்கள் இருக்கக் கூடும்.

8–2. சிறப்பு வெளி (Proper space)

ஒரு சிறப்பு வெக்டரைச் சார்ந்து இரு வெவ்வேறு சிறப்பு மூலங்களிரா, ஆனால் ஒரு சிறப்பு மூலத்தைச் சார்ந்து வெவ்வேறு சிறப்பு வெக்டர்கள் இருக்கக் கூடும் என நாம் கண்டோம். அத்தகைய சிறப்பு வெக்டர்கள் அனைத்தும் கொண்ட கணம் சிறப்பு மூலம் λ-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெளி எனப்படும். இவ்வெளியை M_λ எனக் குறியீடு செய்வோம்.

$$\therefore \quad M_\lambda = \{x \neq o \in V : T(x) = \lambda x\}.$$

8–3. தேற்றம்

சிறப்பு மதிப்பு (மூலம்) λ-ஐச் சார்ந்த அனைத்து சிறப்பு வெக்டர்களது கணம் பூச்சிய வெக்டருடன் சேர்ந்து $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளியாகும்.

நிரூபணம்

சிறப்பு மூலம் λ-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர் $x \in V$ என்க. பின்,

$$T(x) = \lambda x$$
$$M_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\} \subset V$$

M_λ கணத்துடன் பூச்சிய வெக்டரையும் சேர்த்துக் கொள்வோம்.

$x_1, x_2 \in M_\lambda$ எனின்,

$T(x_1) = \lambda x_1, \quad T(x_2) = \lambda x_2$

$x_1, x_2 \in M_\lambda$ எனின், $x_1, x_2 \in V$

$x_1, x_2 \in M_\lambda, a, b \in F \Rightarrow ax_1 + bx_2 \in M_\lambda$

$$\begin{aligned} \therefore \quad T(ax_1 + bx_2) &= a\,T(x_1) + bT(x_2) \\ &= a(\lambda x_1) + b(\lambda x_2) \\ &= \lambda(ax_1) + \lambda(bx_2) \\ &= \lambda(ax_1 + bx_2) \end{aligned}$$

$\therefore \quad ax_1 + bx_2 \in M_\lambda.$

எனவே, M_λ என்பது $V(F)$-ன் உள்வெளி.

8-4. தேற்றம்

சிறப்பு மூலம் λ-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெளி M_λ, T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலியாகும் (Invariant under T).

நிரூபணம்

M_λ என்ற சிறப்பு வெளி T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலி என நிறுவுவதற்கு, $x \in M_\lambda$ என்ற ஒவ்வொரு வெக்டருக்கும் $T(x) \in M_\lambda$ என நிறுவவேண்டும்.

$x \in M_\lambda$ எனின், $\qquad T(x) = \lambda x.$

M_λ என்பது ஓர் உள்வெளியாதலின்,

$x \in M_\lambda, \ \lambda \in F \Rightarrow \lambda x \in M_\lambda.$

(அ-து) $T(x) \in M_\lambda.$

எனவே, M_λ என்பது T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

8-5. நிறநிரல் (Spectrum) – வரையறை

T-ன் அனைத்து சிறப்பு மூலங்களது கணம் T-ன் நிறநிரல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$V_2(R)$ ஒரு வெக்டர் வெளி, T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்பது V_2 (R)-ன் அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணி என்போம்.

$x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in V_2(R)$ எனின்,

$$Bx = \lambda x$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{array}{ll} 5a + 4b = \lambda a, & a(\lambda - 5) - 4b = o \\ a + 2b = \lambda b, & -a + b(\lambda - 2) = o \end{array} \Bigg\} \quad \text{—(1)}$$

கெழு அணியின் அணிக்கோவை பூச்சியமெனின், இச்சமன்பாடு களுக்குத் தீர்வு உண்டு.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = o \qquad \text{எனின்,}$$

$$(\lambda - 5)\ (\lambda - 2) - 4 = o$$

$$\therefore\ \lambda^2 - 7\lambda + 6 = o$$

எனவே, $(\lambda - 6)\ (\lambda - 1) = o$

$$\therefore\ \lambda = 1,\ \lambda = 6.$$

ஆகவே T-ன் சிறப்பு மதிப்புகள் (மூலங்கள்) 1, 6.

$\lambda = 1$ எனின்,

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, $-4a - 4b = o$

$$-\ a - b = o$$

$$\therefore\ a = -b.$$

$\therefore\ x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ என்பது $\lambda = 1$ என்ற சிறப்பு மூலத்தைச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெக்டராகும்.

எனவே, $\lambda = 1$-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெளி (proper space) $\{(1, -1)\}$ என்பதனால் பிறப்பிக்கப்படும்.

$\lambda = 6$ எனின்,

சமன்பாடு (1)-லிருந்து $\quad a - 4b = 0$

$$-\ a + 4b = 0$$

$$\therefore\ a = 4b.$$

$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்பது $\lambda = 6$ என்ற சிறப்பு மூலத்தைச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெக்டராகும்.

எனவே, $\lambda = 6$-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்புவெளி $\{(4, 1)\}$ என்பதனால் பிறப்பிக்கப்படும்.

அதாவது, T-ன் சிறப்புவெளி $(1, -1)$, $(4, 1)$ என்ற வெக்டர்களால் பிறப்பிக்கப்படும்.

8-6. தேற்றம்

சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த $V(F)$ என்ற வெக்டர்வெளி மீது T ஒருபடிச் செயலி என்க. பின், T-ன் சிறப்பு மூலங்கள் F-ன் வெறுமையற்ற ஓர் உட்கணமாகும். மேலும் சிறப்பு மூலங்களது எண்ணிக்கை $V(F)$ வெளியின் பரிமாணத்துக்கு மேற்படாது.

நிரூபணம்

$V(F)$ என்ற முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட வெக்டர் வெளியின்மீது T ஒருபடிச்செயலி என்க. A என்பது $V(F)$-ன் ஓர் அடிப்படையான B-ஐச் சார்ந்த T-ன் அணி என்க. λ என்பது T-ன் யாதாமொரு சிறப்பு மூலமெனின், $x \in V$ என்ற பூச்சியமில் ஒரு வெக்டர்

$$T(x) = \lambda x$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

$\therefore \quad Tx - \lambda I x = o \qquad$ (I-சர்வசம செயலி)

$\therefore \quad (T - I)\, x = o, \; x \neq o$

எனவே, $(T - \lambda I)$ ஒருமையானது (Singular)

$\therefore \quad [A - \lambda I]$ ஒருமையானது

$\therefore \quad |A - \lambda I| = o$

$|A - \lambda I| = o$ என்ற சமன்பாடு சிறப்பியல்பு சமன்பாடு (Characteristic equation) எனப்படும்.

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் n, $B = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ எனின், பின் $|A - \lambda I| = o$ என்ற சமன்பாடு λ-ல் n படி கொண்டதாகும்.

எனவே, T-ன் சிறப்பு மூலங்களது எண்ணிக்கை n-க்கு மேற்படாது. சிறப்பு மூலங்களைச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்கள்

$$(A - \lambda I)\, x = o$$

என்ற அணி சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும். x வெக்டர் நிரல் அணியாக (Column matrix) விளக்கப்படும்.

8-7. தேற்றம்

$(A - \lambda I) = o$ என்றிருந்தால் மட்டுமே λ என்பது T-ன் சிறப்பு மூலமாகும்.

$$P(t) = \text{அணிக்கோவை } (t\,I - A),$$

என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். பின், $P(\lambda) = o$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் $\lambda \in F$ என்ற திசையிலிகள் T-ன் சிறப்பு மூலங்களாகும். எனவே, $P(\lambda)$ என்பது T-ன் சிறப்பியல்பு கோவை (Characteristic polynomial) எனவும், $|A - \lambda I| = o$ என்ற சமன்பாடு T-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு (Characteristic equation) எனவும் கூறப்படும். மேலும் λ-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்கள்

$$(A - \lambda I)\, x = o$$

என்ற அணி சமன்பாடு (Matrix equation) மூலம் பெறப்படும். x வெக்டர் நிரல் அணியாக விளக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$V_2(R)$ வெக்டர் வெளி மீதமைந்த ஒருபடி நிலை மாற்றம் T-என்க.

T-ன் அணி $= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், T-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|t\,I - A| = o.$$

$$[t\,I - A] = \left[t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$\therefore \quad |t\,I - A| = o$ எனின்,

$$\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = o \quad \text{என்றாகும்.}$$

$\therefore \quad (t-2)(t-1) + 3 = o$

$\therefore \quad t^2 - 3t + 5 = o$

எனவே, $t = \frac{3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2} \notin R.$

∴ மெய்யெண் களத்தில் T-க்குச் சிறப்பு மூலங்கள் கிடையாது. ஆனால் சிக்கலெண் களத்தில் T-ன் சிறப்பு மூலங்கள் $\frac{3+i\sqrt{11}}{2}$, $\frac{3-i\sqrt{11}}{2}$ ஆகும்.

8-8. தேற்றம்

$V(F)$ வெக்டர் வெளி மீதுள்ள T என்ற ஒருபடிச் செயலியின் சிறப்பு மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$-ஐச் சார்ந்த பூச்சியமில் சிறப்பு வெக்டர்கள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும்.

நிரூபணம்

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பவை T-ன் சிறப்பு மூலங்கள், $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை சிறப்பு மூலங்களைச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்கள் என்க.

பின்,
$$\begin{aligned} T(x_1) &= \lambda_1 x_1 \\ T(x_2) &= \lambda_2 x_2 \\ &\ldots \quad \ldots \\ &\ldots \quad \ldots \\ T(x_n) &= \lambda_n x_n. \end{aligned}$$

$n = 1$ எனின், $\{x_1\}$ கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும். இனி தொகுத்தறி முறை (Induction method) யில் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிறுவுவோம்.

$$S_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\ , \quad r < n$$

எனும் கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம் என்க.

$$S_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}\}$$

எனும் கணம் ஒருபடிச் சார்பற்ற கணம் என நிரூபிப்போம்.

$a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1} \in F$ எனின்,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r + a_{r+1} x_{r+1} = o \qquad \text{—(1)}$$

$\Rightarrow \ T(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r + a_{r+1} x_{r+1}) = T(o)$

$\Rightarrow \ a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) + \ldots + a_{r+1} T(x_{r+1}) = o$

$\Rightarrow \ a_1 \lambda_1 x_1 + a_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + a_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = o$

(அ-து) $a_1 \lambda_1 x_1 + a_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + a_r \lambda_r x_r + a_{r+1} \lambda_{r+1} x_{r+1} = o$ —(2)

சமன்பாடு (1)-ஐ λ_{r+1}-ஆல் பெருக்கி அதிலிருந்து சமன்பாடு (2)-ஐ கழிப்பின்,

$a_1(\lambda_{r+1}-\lambda_1)x_1+a_2(\lambda_{r+2}-\lambda_2)x_2+\ldots+a_r(\lambda_{r+1}-\lambda_r)\ x_r=o$
S_1 கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றது. மேலும் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ என்பவை வெவ்வேறானவை.

எனவே, $a_1=o,\ a_2=o,\ \ldots,\ a_r=o.$

இம்மதிப்புகளை சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிடின்,

$$a_{r+1}\ \lambda_{r+1}\ x_{r+1}=o$$

$$\because\ \ x_{r+1}\neq o,\ \ a_{r+1}=o.$$

எனவே, S_2 என்ற கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

(அ-து) கணம் S_1 ஒருபடிச் சார்பற்றதெனின், கணம் S_2-ம் ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

$\therefore$ $\{x_1\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றதாதலின் தொகுத்தறி முறைப்படி $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்ற கணம் ஒருபடிச் சார்பற்றதாகும்.

8-9. தேற்றம். கெய்லி-ஹமில்டன் தேற்றம். (Cayley Hamilton Theorem)

ஒரு களத்தின் மீதமைந்த அனைத்து சதுர அணிகளும் அதனது சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்.

நிரூபணம்

$V(F)$ என்பது F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி, $T: V\to V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க.

V வெளியின் ஓர் அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணி $[a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij}\in F$ என்போம்.

$$(\text{அ-து})\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

I என்பது சர்வசம அணி, λ திசையிலி எனின்,

$$\rho(\lambda)=|T-\lambda I|$$
$$=|A-\lambda I|=o$$

என்பது A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடாகும்.

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

எனவே, $|A - \lambda I| = o$ எனின்,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = o$$

$\therefore \quad |A - \lambda I| = (-1)^n \{\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \rho_2 \lambda^{n-2} + \dots + \rho_n\}$ (என்க)

$= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_o$ (என்க)

$\therefore \quad \rho(\lambda) = |A - \lambda x|$

$= a_o + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n.$ —(1)

A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு, $|A - \lambda I| = o$

$\therefore \quad a_o + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n = o$

A என்பது இச்சமன்பாட்டில் பொருந்தும் என நாம் நிறுவ வேண்டும்.

(அ-து) $a_o I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = o$
என நிறுவவேண்டும்.

$[A - \lambda I]$ அணியின் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணிக் கோவையின் படி $(n-1)$ ஆதலின், $[A - \lambda I]$ அணியினது துணை அணி (adjoint matrix) அல்லது A அணியின் சிறப்பியல்பு துணை

அணியின் மூலங்கள் λ-ல் $(n-1)$ படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை யாகும்.

$\therefore$ துணை அணி $[A - \lambda I]$
$$= B_0 + B_1 \lambda + B_2 \lambda^2 + \ldots + B_{n-1} \lambda^{n-1} \qquad \text{—(2)}$$
இங்கு $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ என்பவை சதுர அணிகளாம்.

$\because$ $[A - \lambda I]$ துணை அணி $[A - \lambda I] = |A - \lambda I| I$,
சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐப் பயன்படுத்தி,
$$[A - \lambda I]\,[B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1}]$$
$$= I\,[a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n]$$

இரு பக்கங்களில் உள்ள λ-ன் ஒத்த படிகளைச் சமன்படுத்தினுல் பின் வரும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கப் பெறுவோம்.

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 I \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I \\ AB_2 - B_1 &= a_2 I \\ \ldots &\quad \ldots \\ \ldots &\quad \ldots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I \\ - B_{n-1} &= a_n I \end{aligned}$$

இச்சமன்பாடுகளை முறையே $I, A, A^2, \ldots, A^n$-ஆல் முன் பெருக்கம் (premultiply) செய்யின்,

$$\begin{aligned} I A B_0 &= I a_0 I = a_0 I \\ A^2 B_1 - A B_0 &= A a_1 I = a_1 A \\ A^3 B_2 - A^2 B_1 &= A^2 a_2 I = a_2 A^2 \\ \ldots &\quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots &\quad \ldots \quad \ldots \\ A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} &= A^{n-1} a_{n-1} I = a_{n-1} A^{n-1} \\ - A^n B_{n-1} &= A^n a_n I = a_n A^n. \end{aligned}$$

மேற்குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டினுல்,
$$o = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$
என்ருகும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-ன்படி
$$P(A) = o \quad \text{அல்லது} \quad P(T) = o.$$

எடுத்துக்காட்டு

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற சதுர அணி அதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் பொருந்தும் என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = o \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{bmatrix} = o$$

$$\therefore \quad (1-\lambda)(1+\lambda)^2 - 2[-2(1+\lambda) - o] = o$$

$$\therefore \quad (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 4(1+\lambda) = o$$

$$\Rightarrow \quad (1+\lambda)[(1-\lambda)(1+\lambda) + 4] = o$$

$$\Rightarrow \quad (1+\lambda)(1-\lambda^2 + 4) = o$$

$$\Rightarrow \quad (1+\lambda)(5-\lambda^2) = o$$

$$\therefore \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 5 = o$$

இனி நாம் A அணி $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 5 = o$ என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்தும் என நிறுவ வேண்டும்.

(அ-து) $A^3 + A^2 - 5A - 5I = o$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

எனவே,

$$A^3 + A^2 - 5A - 5I$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$- 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+5-5-5 & 10+0-10+0 & 0+0+0+0 \\ 10+0-10+0 & -5+5+5-5 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & -1+1+5-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = o.$$

$$A^3 + A^2 - 5A - 5I = o.$$

எனவே, அணி A அதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்.

8-10. ஒருமையற்ற (non-singular) அணியின் நேரெதிர் அணி

A என்பது ஒருமையற்ற அணி (பூச்சியமில் கோவை அணி), $|A| \neq o$ என்போம். பின்,

$|A - \lambda I| = o$ என்பது A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடாகும். (அ-து) A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$a_o + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n = o \qquad \text{—(1)}$$

மீண்டும் தேற்றம் 8-9-ன் படி,

$$a_o I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n = o \qquad \text{—(2)}$$

சமன்பாடு (1) அனைத்து λ-ன் மதிப்புகளுக்கும் குறிப்பாக $\lambda = o$ என்ற மதிப்புக்கும் பொருந்தும்.

$\lambda = o$ எனின்,

$$|A - oI| = a_o$$

(அல்லது), $|A| = a_o$

$\because \quad |A| \neq o, \quad a_o = o.$

சமன்பாடு (2)-ஐ a_o-ஆல் வகுப்பின்,

$$I + \frac{a_1}{a_o} A + \frac{a_2}{a_o} A^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_o} A^n = o$$

பின், $$I = -\left[\frac{a_1}{a_o} A + \frac{a_2}{a_o} A^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_o} A^n\right]$$

$\bar{A}'$ ஆல் பின் பெருக்கம் செய்யின், ($\because \quad |A| \neq o$)

$$I \bar{A}' = -\left[\frac{a_1}{a_o} A \bar{A}' + \frac{a_2}{a_o} A^2 \bar{A}' + \ldots + \frac{a_n}{a_o} A^n \bar{A}'\right] \qquad \text{—(3)}$$

$\because \quad I\bar{A} = \bar{A}', \; A\bar{A}' = I, \; A^2 \bar{A}' = A\,(A\bar{A}') = A\,I = A,$

$A^3 \bar{A}' = A^2 (A\bar{A}') = A^2 I = A^2, \ldots$

$A^n \bar{A}' = A^{n-1} (A\bar{A}') = A^{n-1} I = A^{n-1}.$

எனவே, சமன்பாடு (3)-லிருந்து,

$$\bar{A}' = -\left[\frac{a_1}{a_o} I + \frac{a_2}{a_o} A + \frac{a^3}{a_o} A^2 + \ldots + \frac{a_n}{a^o} A^{n-1}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

A-ன் நேரெதிர் அணியைக் காண்க.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |A| = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3[o] + 1[2-12] + 2[o]$$
$$= o - 10 + o$$
$$= -10 \neq o.$$

$\therefore$ A அணி ஒருமையற்ற அணியாகும்.

இதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = o$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\therefore \ |A - \lambda I| = o \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = o$$

$$\therefore \ \lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda + 10 = o.$$

இச்சமன்பாட்டில் A பொருந்துமாதலின்

$$A^3 - 5A^2 - A + 10I = o$$

$$a_0 = 10, \ a_1 = -1, \ a_2 = -5, \ a_3 = 1$$

$$\bar{A}' = -\left[\frac{a_1}{a_0} I + \frac{a_2}{a_0} A + \frac{a_3}{a_0} A^2\right]$$

$$= -\left[\frac{-1}{10} I - \frac{5}{10} A + \frac{1}{10} A^2\right]$$

$$\therefore \quad \bar{A}' = \frac{1}{10} I + \frac{5}{10} A - \frac{1}{10} A^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -3 & 7 \\ 15 & -1 & 8 \\ 20 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{A}' = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16 & -3 & 7 \\ 15 & -1 & 8 \\ 20 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{15}{10} & -\frac{5}{10} & \frac{10}{10} \\ \frac{5}{10} & 0 & \frac{15}{10} \\ \frac{20}{10} & 0 & \frac{10}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{16}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{15}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{20}{10} & -\frac{4}{10} & \frac{12}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{15}{10} & -\frac{5}{10} & \frac{10}{10} \\ \frac{5}{10} & 0 & \frac{15}{10} \\ \frac{20}{10} & 0 & \frac{10}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{16}{10} & +\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{15}{10} & +\frac{1}{10} & -\frac{8}{10} \\ -\frac{20}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{12}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{10}+\frac{15}{10}-\frac{16}{10} & 0-\frac{5}{10}+\frac{3}{10} & 0+\frac{10}{10}-\frac{7}{10} \\ 0+\frac{5}{10}-\frac{15}{10} & \frac{1}{10}+0+\frac{1}{10} & 0+\frac{15}{10}-\frac{8}{10} \\ 0+\frac{20}{10}-\frac{20}{10} & 0+0+\frac{4}{10} & \frac{1}{10}+\frac{10}{10}-\frac{12}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{10}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -10 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

எனவே $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ எனின்,

A-ன் நேரெதிர் அணி $\bar{A}' = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -10 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

8-11. தேற்றம்

F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(F)$, $T: V \to V$ ஒருபடிச் செயலி என்க. பின் $(T - \lambda I)$ ஒருமையுற்றதாக இருந்தால் மட்டுமே $\lambda \in F$ என்ற திசையிலி T-ன் சிறப்பு வெக்டராகும்.

நிரூபணம்

$$T(x) = \lambda x$$
$$= \lambda (I x)$$
$$= \lambda I(x) \quad \text{—(1)}$$ என்ற முறையில்,

x எனும் ஒரு பூச்சியமில் வெக்டர் (non-zero vector) இருந்தால் மட்டுமே λ என்பது T-ன் சிறப்பு வெக்டராகும்.

(1)-லிருந்து, $(T - \lambda I) x = o$.

$x \neq o$. எனவே, வரையறையிலிருந்து $(T - \lambda I)$ ஒருமையுற்றது (Singular) ஆகும்.

8-12. தேற்றம்

$V(F)$ வெக்டர் வெளி மீதமைந்த T ஒருபடி நிலை மாற்றமெனின், $\lambda \in F$ என்பதன் சிறப்பு வெளி (proper space) $(T - \lambda I)$-ன் பூச்சிய வெளியாகும்.

நிரூபணம்

பூச்சிய வெளி $(T - \lambda I) = \{x \in V : (T - \lambda I) x = o\}$ —(1)
$(T - \lambda I) x_1 = o,\ x_1 \in V$ என்க.

$\therefore\ T(x_1) = \lambda I x_1 = \lambda x_1$ —(2)

$a \in F$ எனின்,

$$T(ax_1) = aT(x_1)$$
$$= a\lambda(x_1) \qquad [\because \ (2)\text{-ன்படி}]$$
$$= \lambda(ax_1)$$
$$\therefore \ T(ax_1) = \lambda(ax_1)$$

எனவே, (1)-ன்படி, $ax_1 \in$ பூச்சியவெளி $(T - \lambda I)$

$\therefore$ பூச்சிய வெளி $(T - \lambda I) = \{ax_1 : a \in F\}$.

எனவே, பூச்சிய வெளி $(T - \lambda I)$ என்பது λ-ன் சிறப்பு வெளியாகும்.

மாதிரி – 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ என்ற சதுர அணியினது சிறப்பியல்பு சமன்பாடு காண்க. மேலும் A அணி சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் பொருந்தும் எனவும் நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$.

$$\therefore \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

எனவே, $(2-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-1)] + 1$
$[-1(2-\lambda) - (-1)(1)] + 1[-1(-1) - (2-\lambda).1] = 0$

$\therefore \ (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2) + (\lambda - 1) + (\lambda - 1) = 0$

(அ-து) $6 - 8\lambda + 2\lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0$

எனவே, $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$ என்பது A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு.

இனி சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் A பொருந்தும் என நிறுவுவோம்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2-2-1 & 2+1+2 \\ -2-2-1 & 1+4+1 & -1-2-2 \\ 2+1+2 & -1-2-2 & 1+1+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$A^3 = A^2.A$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+5+5 & -6-10-5 & 6+5+10 \\ -10-6-5 & 5+12+5 & -5-6-10 \\ 10+5+6 & -5-10-6 & 5+5+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$+ 9 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -36 & 30 & -30 \\ 30 & -36 & 30 \\ -30 & 30 & -36 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-36+18-4 & -21+30-9+0 & 21-30+9+0 \\ -21+30-9+0 & 22-36+18-4 & -21+30-9+0 \\ 21-30+9+0 & -21+30-9+0 & 22-36+18-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \quad A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$

(அ-து) A அணி

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்தும்.

மாதிரி—2

மாதிரி-1-ல் உள்ள A அணியின் நேரெதிர் அணி காண்க.

நிருபணம்

$$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$$

$$\therefore \quad 4I = A^3 - 6A^2 + 9A$$

$$I = \tfrac{1}{4}(A^3 - 6A^2 + 9A)$$

இருபக்கமும் $\bar{A}'$ ஆல் முன் பெருக்கம் செய்யின்,

$$\bar{A}' I = \tfrac{1}{4}\,[\bar{A}' A^3 - 6\,\bar{A}' A^2 + 9\,\bar{A}' A]$$

$$= \tfrac{1}{4}\,[A^2 - 6A + 9I]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & +6 & -6 \\ 6 & -12 & +6 \\ -6 & +6 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-12+9 & -5+6+0 & 5-6+0 \\ -5+6+0 & 6-12+9 & -5+6+0 \\ 5-6+0 & -5+6+0 & 6-12+9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{A}' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

மாதிரி–3

$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பு மதிப்புகளையும் ஒத்த சிறப்பு வெளியையும் காண்க.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

$$[A - \lambda I] = \left(\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (8-\lambda) & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (8-\lambda)\,[(7-\lambda)(3-\lambda) - 4.4] + 6\,[-6(3-\lambda) - (-4).2] + 2\,[(-6)(-4) - (2)(7-\lambda)]$$

$$= (8-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 5) + 6\,(6\lambda - 10) + 2\,(2\lambda + 10)$$

$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 45\lambda.$$

$|A-\lambda I| = 0$ எனின்,

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda-3)(\lambda-15) = 0$$
$$\therefore \quad \lambda = 0, \ \lambda = 3, \ \lambda = 15.$$

அணி சமன்பாடு

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad -(1)$$

$\lambda = 0$ எனின்,

$$(A - 0 \cdot I)x = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$$

இவற்றை விடுவிப்பின்,

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2} = m \quad (\text{என்க})$$

பின், $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

என்பது $\lambda = 0$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு (Eigen) வெக்டராகும்.

$\lambda = 3$ எனின்,

$$(A - 3I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

(அ-து) $\begin{pmatrix} 8-3 & -6 & 2 \\ -6 & 7-3 & -4 \\ 2 & -4 & 3-3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(அ-து) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \begin{aligned} 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

இச் சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின்,

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-2} = n \quad (\text{என்க})$$

$$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

என்பது $\lambda = 3$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டராகும் (n என்பது பூச்சியமில் மெய்யெண்).

$\lambda = 15$ எனின்,

$$(A - 15I)\,x = 0$$

$$\therefore \quad \left(\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} - 15 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8-15 & -6 & 2 \\ -6 & 7-15 & -4 \\ 2 & -4 & 3-15 \end{pmatrix} x = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad \begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} -7x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 8x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

இவற்றை விடுவிப்பின்,

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1} = p \quad (\text{என்க})$$

$$\text{எனவே,} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

என்பது $\lambda = 15$ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டராகும். p என்பது யாதாமொரு பூச்சியமில் மெய்யெண்.

எனவே, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

என்பவை பிறப்பிக்கும் வெளிகள் $\lambda = 0, 3, 15$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெளிகளாகும்.

மாதிரி-4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியினது சிறப்பு வெளிகள், சிறப்பு வெக்டர்கள் முதலியவற்றைக் காண்க.

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$ என்பது A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$ எனின்,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (1-\lambda)\,[(1-\lambda)(1-\lambda) - 1] - 1\,[1\,(1-\lambda) - 1] + 1\,[1 - 1\,(1-\lambda)] = 0$$

$$\therefore \quad (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) + \lambda + \lambda = 0$$

$$\therefore \quad 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \lambda + \lambda + \lambda = 0$$

$$\therefore \quad 3\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

(அ-து) $\lambda^2(\lambda - 3) = 0$

எனவே, $\lambda = 0, 0, 3.$

அணிச் சமன்பாடு $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda = 0$ எனின்,

$$(A - 0I)x = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(அ-து) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளும், $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ என்ற சமன் பாட்டிற்குச் சமானமானவை.

இவ்வகையில் ஒருபடிச் சார்பற்ற தீர்வு

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$ என்றாகும்.

$$\therefore\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

என்பது $\lambda = 0$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டராகும்.

$\lambda = 3$ எனின்,

$$(A - 3I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

$$\therefore\ \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1} = m \text{ (என்க)}$$

$$\therefore\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

என்பது $\lambda = 3$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டராகும்.

மாதிரி–5

சிக்கலெண் களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V_2(c)$-ல் T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. $V_2(c)$-ன் அடிப்படையைச் சார்ந்த T-ன் அணி $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

T-ன் சிறப்பு மதிப்புகளையும் வெக்டர்களையும் காண்க.

நிருபணம்

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

எனவே, $(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$

$\therefore \quad \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

(அ-து) $(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\therefore \quad \lambda = 1, 6.$

$\lambda = 1$ எனின்,

அணி சமன்பாடு $(A - \lambda I)x = 0$ என்பது $(A - I)x = 0$ என்றாகும்.

$$\therefore \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad 4x_1 + 4x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

$\therefore \quad x_2 = -x_1 \qquad \therefore \quad x_1 = 1, \; x_2 = -1$

எனவே, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

என்பது $\lambda = 1$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர். $\lambda = 6$ எனின்,

அணிச் சமன்பாடு $(A - 6I)\, x = 0$

$$\therefore \quad \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] x = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -x_1 + 4x_2 = 0$$
$$x_1 - 4x_2 = 0$$

(அ-து) $x_1 = 4x_2$

எனவே, $x_1 = 4,\ x_2 = 1.$

$$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$ என்பது

$\lambda = 6$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்.

எனவே, சிறப்பு மதிப்புகள் 1, 6

சிறப்பு வெக்டர்கள் முறையே $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

8-13. சமமூலைவரை அணியாக மாற்றுதல்

பரிமாணம் n உள்ள வெக்டர்வெளி $V(F)$ மீது T ஒரு படி நிலை மாற்றம் என்க. V–ன் ஒரு வரிசைப்பட்ட அடிப்படை,

$$B = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{என்போம்.}$$

$$T(x_1) = a_1 x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n$$
$$T(x_2) = 0\,x_1 + a_2 x_2 + \ldots + 0\,x_n$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$T(x_n) = 0.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_n$$

இதிலிருந்து $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவை சிறப்பு மூலங்கள் $a_1, a_2, \ldots, a_n$-ஐச் சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெக்டர்களாம்.

மேலும் T-ன் அணி

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

என்று விளக்கப்படும்.

(அ-து) T ஒரு சம மூலைவரை அணியாக விளக்கப்படும்.

8-14. வரையறை

முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர் வெளி $V(F)$ மீது T ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின் V-ன் அடிப்படைக் கணத்தில் உள்ள ஒவ்

வொரு வெக்டரும் T-ன் சிறப்பு வெக்டர் எனின், T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் **மூலைவிட்டப்படுத்தக்கூடியது** (Diagonalizable) எனப்படும்.

மாதிரி–6

T ஒருமையுள்ளது (Singular) என்றால் மட்டுமே T என்ற ஒரு படிநிலைமாற்றத்தின் சிறப்பு வெக்டர் 0 என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$T(x) = x = 0$$

(அ-து) $T(x) = 0,\ x \neq 0$

என்ற முறையில் x என்ற பூச்சியமில் வெக்டர் ஒன்று இருந்தால் மட்டுமே T-ன் சிறப்பு வெக்டர் 0 ஆகும்.

$\therefore$ வரையறையின்படி, T ஒருமையுடையதாகும்.

மாதிரி–7

நேர்மாறுதன்மையுடைய T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் சிறப்பு மூலம் λ எனின், $\bar{\lambda}'$ என்பது $\bar{T}'$-ன் சிறப்பு மூலம் என நிரூபி.

நிரூபணம்

$V\ (F)$ வெக்டர்வெளி மீதமைந்த ஒருபடிநிலை மாற்றம் T நேர்மாறு தன்மையுடையது, λ அதன் சிறப்பு மூலம் என்க.

$\therefore$ $x \in V$ என்ற ஒரு வெக்டர்

$$T(x) = \lambda x \qquad \text{—(1)}$$

என்ற முறையில் இருக்கும்.

(1)–லிருந்து,

$$\bar{T}'\, T(x) = \bar{T}'(\lambda x)$$
$$= \lambda\, \bar{T}'(x)$$
$$\therefore I(x) = \lambda\, \bar{T}'(x)$$

$$\therefore \quad x = \lambda\, \bar{T}'(x)$$

எனவே, $\bar{\lambda}'\, x = \bar{\lambda}'\, \lambda\, \bar{T}'(x)$

$$= \bar{T}'(x)$$

$\therefore$ $\bar{T}'$-ன் சிறப்பு மூலம் $\bar{\lambda}'$ ஆகும்.

மாதிரி–8

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனின், $P' A P$ ஒரு சம மூலைவரை அணி என்றவாறு உள்ள அணி P-ஐக் காண்க.

நிரூபணம்

A-ன் சிறப்பியல்பு அணி $(A - \lambda I)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad | A-\lambda^2 I | = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) - 8$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$\therefore \ | A - \lambda I | = 0$ எனின்,

$$\lambda - 4\lambda - 5 = 0$$

(அ–து) $(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$

$\therefore \ \lambda = 5, \ -1$

அணிச் சமன்பாடு $(A - \lambda I)\, x = 0$

$\lambda = 5$ எனின்,

$(A - 5I)\, x = 0$

$$\therefore \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x = 0$$

(அ-து) $\begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -4x_1 + 4x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

எனவே, $x_1 = x_2$.

இதற்கு ஒரு சார்பற்ற தீர்வு (Independant solution) உண்டு.

$x_1 = 1$, எனின், $x_2 = 1$.

$$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

என்பது $\lambda = 5$-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்.

$\lambda = -1$ எனின்,

$$(A + I)\,x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 4 \\ 2 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

எனவே, $2\,x_1 + 4\,x_2 = 0$

$2\,x_1 + 4\,x_2 = 0$

(அ-து) $x_1 + 2\,x_2 = 0.$

இதற்கு ஒரு சார்பற்ற தீர்வு உண்டு,

$x_1 = 2$ எனின், $x_2 = -1.$

$$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

என்பது $\lambda = -1$ ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்.

சிறப்பு வெக்டர்கள் $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ என்பனவற்றை நிரல்களாகப் பெற்ற அணி P என்க.

$$\therefore \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

முதலில் $\bar{P}^1$ ஐக் காண்போம்.

P-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|P - \lambda I| = 0$

$$\therefore \quad \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

(அ-து) $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

எனவே, $(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = 0$

$\therefore -(1-\lambda^2) - 2 = 0$

$\therefore \quad \lambda^2 - 3 = 0$

கெய்லி-ஹமில்டன் தேற்றப்படி, $P^2 - 3I = 0$

அல்லது, $I = \frac{1}{3}P^2$

$$\therefore \quad \bar{P}' I = \tfrac{1}{3}\bar{P}' P^2 = \tfrac{1}{3}(\bar{P}' P) P$$
$$= \tfrac{1}{3} I P$$

$$\therefore \quad \bar{P}' = \tfrac{1}{3} P$$
$$= \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

எனவே, $\bar{P}' A P$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+4 & 2-4 \\ 2+3 & 4-3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} + \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

= மூலே வரை அணி.

8-15. தேற்றம்

சமச்சீர் செயலியின் (Symmetric operator) *எய்கன்* (Eigen) *மதிப்புகள் அனைத்தும் மெய்யானவையாம்.*

நிருபணம்

V என்ற ஓர் உட்பெருக்கு வெக்டர் வெளி T ஒரு சமச்சீர் மாற்றம் என்க. சிறப்பு (eigen) *மதிப்பு λ-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு வெக்டர்* (eigen vector or characteristic vector) *x என்க.*

$$\therefore \quad T(x) = \lambda x$$

λ *மெய்யெனின்* $\lambda = \bar{\lambda}$ *ஆகும்.*

$$\begin{aligned}\lambda(x,x) &= (\lambda x, x)\\ &= [T(x), x]\\ &= [x, T(x)] \qquad (\because T \text{ சமச்சீருடையது})\\ &= (x, \lambda x)\\ &= \overline{(\lambda x, x)}\\ &= \bar{\lambda}\,\overline{(x, x)}\\ &= \bar{\lambda}\,(x, x)\end{aligned}$$

இரு பக்கமும் (x, x)ஆல் வகுக்க, $\lambda = \bar{\lambda}$

எனவே, T-ன் எய்கன் மதிப்புகள் மெய்யானவையாம்.

8–16. தேற்றம்

T என்பது V என்ற வெக்டர் வெளி மீதமைந்த ஒரு சமச்சீர் மாற்றம் என்க. λ, μ என்ற இரு வெவ்வேறு சிறப்பு மதிப்புகளைச் சார்ந்த எய்கன் வெக்டர்கள் x, y எனின், $(x, y) = 0$. (அ-து) x, y செங்குத்து வெக்டர்கள் என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$T(x) = \lambda x$$
$$T(y) = \mu y, \quad \lambda \neq \mu.$$

இனி நாம் $(x, y) = 0$ என நிறுவுவோம்.

$$\begin{aligned}\lambda(x, y) &= (\lambda x, y)\\ &= [T(x), y]\\ &= [x, T^*(y)] \quad (\because T \text{ சமச்சீருடையது})\\ &= [x, T(y)] \quad (T = T^*)\\ &= \overline{[T(y), x]}\\ &= \overline{[\mu y, x]}\\ &= \bar{\mu}\,\overline{(y, x)}\\ &= \bar{\mu}\,(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lambda(x, y) &= \bar{\mu}\,(x, y)\\ &= \mu\,(x, y) \qquad [\because \mu \text{ மெய் மதிப்புடையது}]\end{aligned}$$

எனவே, $(\lambda - \mu)\ (x, y) = 0$

ஆனால் $\lambda - \mu \neq 0$

$\therefore\ (x, y) = 0$

(அ-து) x, y வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்கள்.

8-17. தேற்றம்

T என்ற செயலியின் எய்கன் வெக்டர் λ என்க.

பின் $T > 0$ எனின் $\lambda > 0$ (அ) $T \geq 0$ எனின் $\lambda \geq 0$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$T(x) = \lambda x$ என்க.

$$\therefore \quad [T(x), x] = (\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \| x \|^2$$

$$\therefore \quad [T(x), x] = \lambda \| x \|^2$$

மேலும், $\| x \|^2 \geq 0 \quad \forall\, x.$

எனவே, $[T(x), x] \geq 0$ எனின், $\lambda \geq 0$

(அ) $[T(x), x] > 0$ எனின், $\lambda > 0.$

8-18. தேற்றம்

V என்ற முடிவுள்ள பரிமாண வெக்டர்வெளிமீது T ஒரு படிச் செயலி என்க. $E_1, E_2, \ldots, E_k$ என்ற பூச்சியமில் K ஒருபடிச் செயலிகளும் $C_1, C_2, \ldots, C_k$ என்ற k திசையிலிகளும்

(i) $T = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_k E_k$

(ii) $I = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$

(iii) $E_i E_j = 0, \ i \neq j$

என்ற முறையில் உள்ளன என்போம். பின் கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(*a*) $C_1, C_2, \ldots, C_k$ என்பவை வெவ்வேறான T-ன் சிறப்பு மதிப்புகள்.

(*b*) C_i சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெளி E_i-ன் வீச்செல்லை.

(*c*) $E_i^2 = E_i.$

நிரூபணம்

$$I = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad E_i I &= E_i (E_1 + E_2 + \ldots + E_k)\\ &= E_i E_1 + E_i E_2 + \ldots + E_i E_k\\ &= E_i E_i \qquad (\because \ E_i E_j = 0, \ i \neq j)\\ &= E_i^2\end{aligned}$$

$$\therefore \quad E_i = E_i^2.$$

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ என்பவை T-ன் வெவ்வேறு சிறப்பு மதிப்புகள்.

$$T = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \ldots + C_k E_k$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad T E_i &= (C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_k E_k) E_i \\ &= C_i E_1 E_i + C_2 E_2 E_i + \ldots + C_k E_k E_i \\ &= C_i E_i E_i \quad (\because \; E_i E_j = o, \; i \neq j) \\ &= C_i E_i^2 \\ &= C_i E_i \quad (\because \; E_i^2 = E_i) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad T E_i = C_i E_i$$

$$\therefore \quad (T - C_i I) \; E_i = o$$ (அ-து) பூச்சிய செயலி

$\because$ $E_i \neq o$, $x \neq o$ என்ற வெக்டர் $E_i x \neq o$ என்ற முறையில் இருக்கும்.

$$\therefore \quad (T - C_i I) \; E_i x = o$$

$E_i x = y \neq o$ என்க.

எனவே, Y என்ற ஒரு பூச்சியமில் வெக்டருக்கு

$$(T - C_i I) y = o$$

(அ-து) $Ty = C_i y, \; y \neq o.$

எனவே, c_i ஒரு சிறப்பு மதிப்பு (Characteristic vector).

c ஒரு திசையிலி என்க. c ஒரு சிறப்பு மதிப்பு எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad T x = cx, \; x \neq o.$$

$$T = \sum c_i E_i, \; x = Ix = (\Sigma E_i) x$$

$$\therefore \quad (C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_k E_k) x = C (E_1 + E_2 + \ldots + E_k) x$$

(அ-து) $C_1 E_1 x + C_2 E_2 x + \ldots + C_k E_k x$
$= C E_1 x + C E_2 x + \ldots + C E_k x$

$$\therefore \quad (c_1 - c) E_1 x + (c_2 - c) E_2 x + \ldots + (c_k - c) E_k x = o$$

$E_1, E_2, \ldots, E_k$ செயலிகளை அடுத்தடுத்து பயன்படுத்தினால்,

$$(c_1 - c) E_1 x = o, \; (c_2 - c) E_2 x = o, \ldots, (c_k - c) E_k x = o$$

$$[\because \; E_i E_j = o, \; i \neq j, E_i^2 = E_i].$$

$E_1 x, E_2 x, \ldots, E_k x$ என்ற அனைத்து வெக்டர்களும் பூச்சியமெனின்,

$$(E_1 + E_2 + \ldots + E_k) x = o$$

$$\therefore \quad I x = o$$

$\therefore \quad x = o.$ ஆனால் $x \neq o.$

எனவே, $E_1 x$, $E_2 x$, ..., $E_k x$ அனைத்தும் பூச்சியமாயிராது. குறைந்தது ஒன்றாவது பூச்சியமில் வெக்டராகும்.

$$E_i x \neq o \quad \text{என்க.}$$

எனவே, $(c_i - c) E_i x = o$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$c_i - c = o \quad \text{என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad c = c_i$$

(அ-து) c என்பது $c_1, c_2, \ldots, c_k$ என்ற திசையிலிகளில் ஒன்று.

$\therefore$ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ என்பவை T-ன் சிறப்பு மூலங்களாம்.

c_i சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெளி E_i-ன் வீச்செல்லை.

இனி $W_i = (T - c_i I)$-ன் பூச்சிய வெளி E_i-ன் வீச்செல்லை என நிறுவுவோம்.

$$x \in \text{ பூச்சிய வெளி } (T - c_i I) \quad \text{என்க.}$$

$$\therefore \quad (T - c_i I) x = o$$

$$\because \quad T = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_k E_k$$

$$I = E_1 + E_2 + \ldots + E_k,$$

$$[(C_1 E_1 + C_2 E_2 + \ldots + C_k E_k) - C_i (E_1 + E_2 + \ldots + E_k)] \, x = o$$

$$\therefore \quad [(C_1 - C_i) E_1 + \ldots + (C_j - C_i) E_j + \ldots + (C_k - C_i) \, E_k] \, x = o$$

இனி $E_1, E_2, \ldots, E_k$-ஆல் அடுத்தடுத்து பெருக்க,

$$(C_1 - C_i) E_1 x = o, \; (C_2 - C_i) E_2 x = o, \ldots, (C_k - C_i) E_k x = o$$

$$[\because \; E_i E_j = o, \; i \neq j, \; E_i^2 = E_i]$$

அதாவது, $(C_j - C_i) E_j x = o, \quad \forall j$

$$j \neq i. \quad \therefore \quad c_j - c_i \neq o.$$

எனவே, $E_j x = o, \; \forall \; j \neq i$.

$$\therefore \quad x = Ix = (E_1 + E_2 + \ldots + E_k) \; x = o, \quad \forall \; j \neq i$$

$$x = E_i x \Rightarrow x \in E_i\text{-ன் வீச்செல்லை.}$$

$\therefore$ c_i சார்ந்த T-ன் சிறப்பு வெளி E_i-ன் வீச்செல்லையாகும்.

பயிற்சி 8

1. A-ன் சிறப்பு வெக்டர் x_1 எனின், x_1-ஐச் சார்ந்த சிறப்பு மூலம் λ_1 ஒன்றுதான் உண்டு என நிறுவுக.

2. பின்வரும் அணிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் அனைத்து சிறப்பு மதிப்புகளைக் காண்க.

$$\text{(i)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)}\ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

மேலும் எந்த அணி மூலை விட்டப்படுத்தக்கூடியது (diagonalizable) எனக் காண்க.

{விடை: (i) $-2, -2, 4$ (ii) $2, -4$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A மூலை விட்டப்படுத்தக்கூடியது. $\bar{P}' A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ }

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனின்,

(i) மெய்யெண் களம் R-ன் மீதமைந்த A-ன் சிறப்பு மதிப்புகளையும்,

(ii) சிக்கலெண் களம் C-ன் மீதமைந்த சிறப்பு மதிப்புகளையும் காண்க.

{விடை: (i) $\lambda = 3$ (ii) $\lambda = 3,\ i,\ -i$.}

4. பின்வரும் அணிகளுக்குச் சிறப்பு மதிப்புகளையும் சிறப்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

$$\text{(i)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

{விடைகள்: (i) $o, 3$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$

(ii) 1, 1, 1, 2}

5. A-ன் சிறப்பு மூலம் λ_1 எனின், λ_1-ஐச் சார்ந்த A-ன் சிறப்பு வெக்டார்கள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு உண்டு என நிறுவுக.

6. T என்ற நேர்மாறுத்தன்மையுடைய செயலியின் எய்கன் மதிப்பு λ எனின், $\bar{T}^1$-ன் எய்கன் மதிப்பு $\bar{\lambda}^1$ என நிறுவுக.

7. $\begin{bmatrix} a & h & g \\ o & b & o \\ o & o & c \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் எய்கன் மூலங்களையும் எய்கன் வெக்டார்களையும் காண்க.

{விடை: எய்கன் மதிப்பு: $a, b, c.$

எய்கன் வெக்டார்: $K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_2 \begin{bmatrix} h \\ b-a \\ o \end{bmatrix},$

$K_3 \begin{bmatrix} g \\ c-a \\ o \end{bmatrix}$ }

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்,

A அணியின் சிறப்பு மூலங்களையும் வெக்டார்களையும் காண்க.

{விடை: சிறப்பு மூலங்கள்: $1, 3, -4.$

சிறப்பு வெக்டார்கள் : $a \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$

$c \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$ }

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனின்,

A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டையும் சிறப்பு வெளிகளையும் காண்க.

{விடை: $1, 2, 2.$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ }

10. பின்வரும் அணிகளை சம மூலை வரை அணிகளாக மாற்றுக.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ b+1 & b \end{bmatrix}$

{விடை: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ }

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ எனின்,

A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டையும், *A*-ன் நேரெதிர் அணியையும் காண்க.

{விடை: (i) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = o$

(ii) $\bar{A}' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ }

12. கெய்லி--ஆமில்டன் தேற்றத்தை உபயோகித்துப் பின்வரும் அணிகளது நேரெதிர் அணிகளைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

{விடை: (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3i & i \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ }

9. வீச்சு, மாற்றமின்மை

(Projection, Invariance)

9–1. மாற்றமின்மை (Invariance)

$V(F)$ வெக்டர் வெளி மீது T ஒருபடிச் செயலி, W என்பது V-ன் உள்வெளி என்க. பின்,

$T(x) \in W, \ \forall \ x \in W$

என்றிருந்தால் T-ன் கீழ் W மாற்றமிலாதது எனப்படும்.

T-ன் கீழ் W-ன் விம்பம் $T(W)$ எனின்,

$T(W) = \{ T(x) : \ x \in W \}$

$T(x) \in W \Rightarrow T(x) \in V$

$\therefore \quad T(W) \subset V.$

ஆனால், அனைத்து $x \in W$ எனின், $T(x) \in W$

$\therefore \quad T(W) \subset W$

எனவே, T-ன் கீழ் W மாற்றமிலாததாகும்.

அதாவது,

T-ன் கீழ் W மாற்றமிலாதது $\Rightarrow T(x) \in W, \quad \forall \ x \in W$

குறிப்பு

$T(x) \in W$ எனின், $x \in W$ என்பது சரியல்ல.

எடுத்துக்காட்டு

(1) F களத்தின் மீது x-ல் உள்ள அனைத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி $V(F)$; மீப்பெரும் படியாக n-ஐக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளது வெக்டர் வெளி W, V-ன் உள்வெளி என்க. D என்பது V-ன் மீது அமைந்த வகைக்கெழு

செயலி (Differential operator) என்போம். W-ல் உள்ள யாதாமொரு பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ எனின், $D[f(x)] \in W$. ($\because$ வகையிடுதலால் கோவையின்படி குறையும். $\therefore$ $D[f(x)]$-ன் படி n-ஐ விட குறைவாக இருக்கும்.)

எனவே, $f(x) \in W$ எனின், $D[f(x)] \in W$.

(அ-து) D என்ற வகைக்கெழு செயலியின் கீழ் W என்ற உள்வெளி மாற்றமிலா உள்வெளியாகும்.

(2) $V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளி $W = \{o\}$ என்க. $V(F)$-ன் மீதமைந்த ஒருபடி செயலி T என்க. பின்,

$$o \in W \Rightarrow T(o) = o \in W.$$

எனவே, V-ன் பூச்சிய உள்வெளியான W, T-ன் கீழ் மாற்றமிலாதது.

9–2. ஒடுக்கும் தன்மை (Reducibility)

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் இரு உள்வெளிகள் W_1, W_2 என்க. V-ன் மீதமைந்த ஒருபடிச் செயலி T என்க. பின்,

(i) $V = W_1 \oplus W_2$.

(ii) T-ன் கீழ் W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகள் மாற்றமிலிகள், என்ற முறையில் இருப்பின், T என்ற செயலி W_1, W_2 என்ற வெளிகளால் ஒடுக்கப்பட்டுள்ளது எனப்படும்.

மாதிரி – 1

F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(F)$, T அதன் மீதமைந்த ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்க. பின் $R(T)$, $N(T)$ இரண்டும் T-ன் கீழ் மாற்றமிலிகள் எனக் காண்பி.

நிரூபணம்

$R(T)$ என்பது T-ன் வீச்சு எல்லை (Range of T) .

$N(T)$ என்பது T-ன் பூச்சியவெளி (Null space of T).

$R(T)$, $N(T)$ இரண்டும் V-ன் உள்வெளிகள் என நாம் அறிவோம்.

$$N(T) = \{x \in V;\ T(x) = o\}$$
$$x \in N(T) \Rightarrow T(x) = o$$

ஆனால் பூச்சிய வெளி ஓர் உள்வெளி. $\therefore$ $o \in N(T)$.

(அ-து) $T(x) \in N(T),\ \forall\ x \in N(T)$.

$\therefore$ $N(T)$ என்பது T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலி.

மீண்டும்,

$$R(T) = \{ T(x) \in V;\quad x \in V \}$$

$R(T)$ என்பது $V(F)$-ன் உள்வெளி யாதலின்,

$$x \in R(T) \Rightarrow x \in V$$
$$\Rightarrow T(x) \in R(T)$$

எனவே, $R(T)$ என்பது T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

மாதிரி–2

T என்ற ஒருபடிச் செயலியின் கீழ் W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகள் மாற்றமிலிகள் எனின், இவ்வுள்வெளிகளால் பிறப்பிக்கப்படும் உள்வெளியும் T-ன் கீழ் மாற்றமிலி என நிரூபி.

நிரூபணம்

W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகளால் பிறப்பிக்கப்படும் உள்வெளி W என்க. $\therefore\ W = W_1 + W_2$.

(அ-து) $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ எனின், $x = x_1 + x_2 \in W$.

$$T(x) = T(x_1 + x_2)$$
$$= T(x_1) + T(x_2) \qquad (\because\ T \text{ ஒருபடிச் செயலி})$$

$x_1 \in W_1 \Rightarrow T(x_1) \in W_1$ ($\because$ W_1, T-ன் கீழ் மாற்றமிலி)

$x_2 \in W_2 \Rightarrow T(x_2) \in W_2$ ($\because$ W_2, T-ன் கீழ் மாற்றமிலி)

$\therefore\ T(x_1) + T(x_2) \in W_1 + W_2 = W.$

எனவே, $x \in W \Rightarrow T(x) \in W$.

$\therefore$ T-ன் கீழ் W ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

மாதிரி–3

$T: V \to V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம், $f(t)$ யாதாமொரு பல்லுறுப்புக்கோவை என்க. பின் $f(T)$-ன் கெர்னல் T-ன் கீழ் மாற்றமிலி என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$V(F)$-ன் மீதமைந்து T ஒருபடி நிலைமாற்றமாதலின், $f(T)$-ம் V-ன் மீதமைந்த ஒருபடி நிலை மாற்றமாகும்.

$f(T)$-ன் பூச்சியவெளி (கெர்னல்) W என்க.

$$\therefore\ W = \{ x \in V:\ f(T)\, x = o \} \qquad \text{—(1)}$$

W என்பது T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலி என நிறுவவேண்டும்.

(அ-து) $x \in W \Rightarrow T(x) \in W.$

$$t\, f(t) = f(t).t$$

$$\therefore \quad Tf(T) = f(T).T$$

$$[f(T)\,T](x) = [Tf(t)](x)$$

$x \in W$ எனின்,

$$[f(T)\,T](x) = [Tf(T)]\,x$$

(அ-து) $f(T)\,T(x) = T[f(T)\,x]$

$= T(o), \quad (\because \ (1)\text{-ன்படி})$

$$\therefore \quad T(x) \in W$$

அதாவது, $x \in W \Rightarrow T(x) \in W$

$\therefore$ T-ன் கீழ் W ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

9-3. வீச்சு (Projection)

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி அதனுடைய உள் வெளிகளான W_1, W_2 ஆகியவற்றின் நேரான கூட்டல் (Direct sum) என்க. (அ-து) $V = W_1 \oplus W_2$.

எனவே, $z \in V$ என்ற வெக்டர்,

$$z = x + y, \ x \in W_1, \ y \in W_2$$

என்ற ஒரே முறையில் (uniquely) விளக்கப்படும்.

பின், E என்ற ஓர் உருமாற்றம் ($E: V \to V$)

$$E(z) = x$$

என்று வரையறுக்கப்படின், அது W_1-ல் W_2 வழி வீச்சு (Projectiou on W_1 along W_2) எனப்படும். (அல்லது) E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சு எனப்படும்.

E ஒருபடிச் செயலியாகும்.

z_1, z_2 என்பவை V-ல் உள்ள யாதாமிரு வெக்டர்கள் என்க.

$$\therefore \quad z_1 = x_1 + y_1, \quad x_1 \in W_1, \ y_1 \in W_2$$
$$z_2 = x_2 + y_2, \quad x_2 \in W_1, \ y_2 \in W_2$$

$z_1, z_2 \in V$, $a, b \in F$ எனின், $az_1 + bz_2 \in V$.

$$\because \quad az_1 + bz_2 = a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2)$$
$$= (ax_1 + ay_1) + (bx_2 + by_2)$$
$$= (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)$$

இதில், $ax_1 + bx_2 \in W_1$, $ay_1 + by_2 \in W_2$.

$$\therefore \quad E(az_1 + bz_2) = E[a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2)]$$
$$= E[(ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)]$$
$$= ax_1 + bx_2 \qquad \text{(வரையறையின்படி)}$$

$$E(z_1) = E(x_1 + y_1) = x_1$$
$$E(z_2) = E(x_2 + y_2) = x_2$$

$$\therefore \quad E(az_1 + bz_2) = ax_1 + bx_2$$
$$= aE(z_1) + bE(z_2).$$

எனவே, E ஒருபடிச் செயலியாகும்.

குறிப்பு:

E' என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சு என வரையறுக்கப்படும். (அ-து) $E'(z) = y$; $z = x + y$; $x \in W_1$; $y \in W_2$.

9-4. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளி அதன் உள்வெளிகளான W_1, W_2 ஆகியவற்றின் நேர்கூட்டல் (அ-து) $V = W_1 \oplus W_2$ என்க.

E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்செனின்,

$$E(z) = o \iff z \in W_2$$
$$= z \iff z \in W_1$$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$E(z) = o \iff z \in W_2$$

என்பதை முதலில் நிறுவுவோம்.

$z \in W_2$ எனின், $o + z = z \in W_2$

$E(z) = E(o + z) = o$ (E-ன் வரையறைப்படி)

$$\therefore \quad z \in W_2 \Rightarrow E(z) = o$$

இவ்வாறே, $E(z) = o \Rightarrow z \in W_2$

$$\therefore \quad E(z) = o \iff z \in W_2.$$

அடுத்து, $E(z) = z \iff z \in W_1$ என்பதை நிறுவுவோம்.

$z \in W_1$ எனின், $z + o = z \in W_1$

$$E(z) = E(z + o) = z$$

$$\therefore \quad z \in W_1 \Rightarrow E(z) = z$$

இவ்வாறே, $E(z) = z \Rightarrow z \in W_1$

$$\therefore \quad E(z) = z \iff z \in W_1.$$

9-5. தேற்றம்

V-ல் அமைந்துள்ள *E* என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம் $E^2 = E$ என்றால் மட்டுமே *V*-ன் யாதாமொரு உள்வெளியில் *V*-ன் வீச்சாகும்.

(அ-து) E ஒரு வீச்சு $\Longleftrightarrow E^2 = E$.

நிரூபணம்

W_1, W_2 என்ற உள்வெளிகளது நேரான கூட்டல் V என்க. (அ-து) $V = W_1 \oplus W_2$.

E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சு என்போம்.

$$\therefore \quad E(z) = E(x+y)\ ; \quad z \in V,\ x \in W_1,\ y \in W_2$$
$$= x$$

$E^2 = E$ என நிறுவுவோம்.

$z \in V$ எனின்,

$$\begin{aligned}
E^2(z) &= E[E(z)], \quad z = x + y \\
&= E[E(x+y)] \\
&= E(x) \qquad (\because\ E(x+y) = E(x)) \\
&= E(x+o) \qquad (\because\ o \in W_2 \text{ கூட்டு சர்வ சம மூலகம்}) \\
&= x \\
&= E(z)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad E^2(z) = E(z)$$

(அ-து) $E^2 = E$.

அடுத்து, $E^2 = E$ என்க.

இனி E என்பது V-ன் யாதாமொரு உள்வெளியில் V-ன் வீச்சு என நிறுவுவோம்.

$U = E$-ன் வீச்சு எல்லை (Range) $= \{ z \in V : E(z) = z \}$
$= R(E)$ என்க.

$W = E$-ன் பூச்சிய வெளி (Null space) $= \{ z \in V : E(z) = o \}$
$= N(E)$ என்க.

முதலில் $U \cap W = \{o\}$ என நிறுவுவோம்.

$z \in U \cap W$ எனின், $z \in U,\ z \in W$

$\because\ z \in U,\ E(z) = z$

$\because\ z \in W,\ E(z) = o$

எனவே, $z = o$

(அ-து) $z \in U \cap W \Rightarrow z = o$

எனவே, $U \cap W = \{o\}$

அடுத்து, $V = W_1 + W_2$ என நிறுவுவோம்.

V-ல் உள்ள யாதாமொரு வெக்டர் z என்க.

$$\begin{aligned} \therefore \quad z &= E(z) - E(z) + z \\ &= E(z) + I(z) - E(z) \qquad (\because \; I(z) = z) \\ &= E(z) + (I - E)(z) \end{aligned}$$

U-ன் வரையறையின்படி $E(z) \in U$.

$$\begin{aligned} E[(1 - E)(z)] &= [E(1 - E)](z) \\ &= (E - E^2)z \\ &= (E - E)z, \qquad (\because \; E^2 = E) \\ &= o(z) \\ &= o \end{aligned}$$

$$\therefore \quad E[(1 - E)z] = o$$

W-ன் வரையறையின்படி, $(1 - E)(z) \in W$.

எனவே, $z \in V$ என்ற யாதாமொரு வெக்டர்

$z = E(z) + (1 - E)(z)$, $E(z) \in W, (1 - E)z \in W$ என விளக்கப்படக்கூடும்.

$$\therefore \quad V = U + W$$

மேலும், $U \cap W = \{o\}$

$$\therefore \quad V = U \oplus W.$$

U, W இவற்றின் வரையறையின்படி, E என்பது U-ல் V-ன் வீச்சாம். எனவே, E ஒரு வீச்சு $\Longleftrightarrow E^2 = E$.

9-6. தேற்றம்

V என்பது அதன் உள்வெளிகளான W_1, W_2 ஆகியவற்றின் நேரான கூட்டல் என்க. பின், E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சு எனின் $(1 - E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சாகும்.

நிரூபணம்

E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சு.

$$\therefore \quad E^2 = E, \;\; E(z) = x, \;\; z = x + y, \;\; x \in W_1, \;\; y \in W_2.$$

$E' = (1 - E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சு என நிறுவுதல் வேண்டும்.

$$
\begin{aligned}
E'^2 = (1-E)^2 &= (1 - E)(1 - E) \\
&= I^2 - IE - EI + E^2 \\
&= I - E - E + E \quad (\because\ EI = IE = E,\ E^2 = E) \\
&= I - E \\
&= E'
\end{aligned}
$$

(அ-து) $\quad E'^2 = E'$

$\therefore\ E' = (1 - E)$ என்பது ஒரு வீச்சு.

மீண்டும்,

$$
\begin{aligned}
E'(z) &= (1 - E)(z) = I(z) - E(z) \\
&= z - E(z)\ ; \quad z = x + y,\ x \in W_1,\ y \in W_2 \\
&= z - x \qquad (\because\ E(z) = x) \\
&= x + y - x \\
&= y
\end{aligned}
$$

(அ-து) $\quad E'(z) = y.$

$\therefore\ E' = (1 - E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சாகும்.

மறுதலையாக,

$E' = (1 - E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சு என்க.

இனி E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சு என நிறுவுவோம்.

$(1 - E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சு.

$\therefore\ (I - E)^2 = (I - E),\ \ (I - E)z = y \in W_2.$

$\therefore\ (I - E)(I - E) = I - E$

$\therefore\ I - EI - IE + E^2 = I - E$

$\therefore\ I - E - E + E^2 = I - E \qquad (\because\ IE.EI = E)$

$\therefore\ E^2 - E = o$

$\therefore\ E^2 = E$

எனவே, E ஒரு வீச்சாகும்.

மீண்டும், $(I - E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீச்சாதலின்,

$$
\begin{aligned}
&(I - E)(z) = y \\
&z - E(z) = y \\
&z - x = y \qquad (\because\ z = x + y,\ E(z) = x)
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad x + y - E(z) = y$

$\therefore \quad x - E(z) = o$

எனவே, $E(z) = x$.

$\therefore \quad E$ என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சாகும்.

எனவே, E என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சு $\Longleftrightarrow$ $(I-E)$ என்பது W_2-ல் V-ன் வீழ்ச்சி.

9–7. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளி U, T என்பது ஒருபடி நிலைமாற்றம், E என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு எனின், T-ன் கீழ் U ஒரு மாற்றமிலி $\Longleftrightarrow$ $ETE = TE$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

E என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு.

எனவே, W என்ற ஓர் உள்வெளி,

$$V = U \oplus W$$

என்ற முறையில் V-ல் இருக்கின்றது.

(அ-து) $z = x+y,\ z \in V,\ x \in U,\ y \in W$.

பின், $E(z) = E(x+y) = x \quad$ —(1)

$E(z) = z \Longleftrightarrow z \in W \quad$ —(2)

$E(z) = o \Longleftrightarrow z \in W \quad$ —(3)

U என்பது T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலி என்க.

இனி $ETE = TE$ என நிறுவுவோம்.

T-ன் கீழ் U ஒரு மாற்றமிலியாதலின்,

$$T(x) \in U, \quad \forall\ x \in U.$$

$TE(z) = T(x), \quad (\because \ E(z) = x)$

$ETE(z) = ET(x)$

$\qquad = T(x), \quad (\because \ T(z) \in U)$

$\therefore \quad TE(z) = ETE(z)$

எனவே, $TE = ETE$

அடுத்து, $TE = ETE$ என்க.

இனி, T-ன் கீழ் U ஒரு மாற்றமிலி என நிறுவுவோம்.

$$TE = ETE$$

$\therefore \quad E(x) = x, \quad x \in U.$

$x \in U$ எனின்,

$$ETE = TE$$
$$ETE(x) = TE(x)$$

$\therefore \quad E[T(x)] = T(x) \qquad (\because \quad T(x) = x)$

$\therefore \quad Tx \in U \qquad (\because \quad E$ என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு)

$\therefore \quad T$-ன் கீழ் U ஒரு மாற்றமிலி வெளியாகும்.

எனவே, T-ன் கீழ் U மாற்றமிலி $\Longleftrightarrow ETE = TE.$

9-8. தேற்றம்

V என்ற வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகள் U, W.
$V = U \oplus W$, T என்பது V-ன் மீதமைந்த ஒருபடி நிலைமாற்றம். E என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு எனின்,

(U, W) சோடியில் T ஒடுக்கப்படும் $\Longleftrightarrow ET = TE.$

நிரூபணம்

$z = x + y$ எனின்,
$x \in U, \ y \in W, \ E(z) = x$ என்றாகும்.

U, W இரண்டும் T-ன் கீழ் மாற்றமிலிகளாகும்.

$$\therefore \quad T(x) \in U \qquad \forall \ x \in U$$
$$T(y) \in W \qquad \forall \ y \in W$$

$$\therefore \quad E[T(x)] = T(x), \qquad \because T(x) \in U$$
$$E[T(y)] = o \quad , \qquad \because T(y) \in W.$$

மீண்டும், $ET(z) = E[T(z)]$
$= E[T(x + y)]$
$= E[Tx + Ty]$
$= E[T(x)] + E[T(y)]$
$= T(x) + o \qquad (\because \quad T(x) \in U, \ T(y) \in W)$
$= T[E(z)], \qquad (\because \quad E(z) = x)$

(அ-து) $ET(z) = T[E(z)]$

$$\therefore \quad ET = TE,$$

மறுதலையாக, $ET = TE$ என்க.

இனி, (U, V) சோடியால் T ஒடுக்கப்படும் என நிறுவுவோம். (அ-து) $V = U \oplus W$ ஆதலின் U, V இரண்டும் T-ன் கீழ் மாற்றமிலிகள் என நிறுவவேண்டும்.

$x \in U$ என்க.

$\therefore \quad ET = TE, \; ET(x) = TE(x) = T(x), \qquad [\because \; E(x) = x]$

$E[T(x)] = T(x)$, மேலும் E என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு.

$\therefore \quad T(x) \in U$

(அ-து) $x \in U$ எனின், $T(x) \in U$

எனவே, T-ன் கீழ் U ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

மீண்டும், $y \in W$ என்க. $\quad \therefore \; E(y) = o$

$$\because \quad ET = TE, \; ET(y) = TE(y) = T(o) \qquad (\because \; E(y) = o)$$
$$= o$$

$ET(y) = o$. மேலும் E என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு.

$$\therefore \quad T(y) \in W.$$

$\therefore \quad y \in W \Rightarrow T(y) \in W.$

எனவே, T-ன் கீழ் W ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

$\therefore$ (U, W) சோடியால் T ஒடுக்கப்படும்.

$$\Longleftrightarrow ET = TE.$$

9-9. தேற்றம்

F களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி $V(F)$. U_1, W_1; U_2, W_2 என்பவை $V(F)$-ன் நிரப்பு உள்வெளிகள். (அ-து) $V = U_1 \oplus W_1$, $V = U_2 \oplus W_2$. E_1, E_2 என்பவை முறையே U_1-ல் V-ன் வீச்சு, U_2-ல் V-ன் வீச்சு என்போம். பின், F களம் $1 + 1 \neq 0$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது என்ற கட்டுப்பாட்டின் கீழ், பின்வரும் முடிவுகள் மெய்யாகும்.

1. $(E_1 + E_2)$ என்பது $E_1 E_2 = E_2 E_1 = O$ என்றால் மட்டுமே ஒரு வீச்சு ஆகும். $U = U_1 \oplus U_2$, $W = W_1 \cap W_2$ எனின், மேற்குறிப்பிட்ட கட்டுப்பாட்டின் கீழ் $E = E_1 + E_2$ என்பது U-ல் V-ன் வீச்சாகும்.

2. $(E_1 - E_2)$ என்பது $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_2$ என்றால் மட்டுமே ஒரு வீச்சு ஆகும். $U' = U_1 \cap W_2$, $W' = W_1 \oplus U_2$ எனின், மேற்குறிப்பிட்ட கட்டுப்பாட்டின் கீழ் $E = E_1 - E_2$ என்பது U'-ல் V-ன் வீச்சு.

3. $U'' = U_1 \cap U_2$, $W'' = W_1 + W_2$ என்க. பின், $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E$ எனின், E என்பது U''-ல் V-ன் வீச்சு.

நிரூபணம்

E_1, E_2 என்பவை முறையே U_1, U_2-ல் V-ன் வீச்சுகள்.

$$\therefore E_1^2 = E_1,\ E_2^2 = E_2 \qquad \text{—(1)}$$

மேலும்,
$$\left.\begin{aligned} V &= U_1 \oplus W_1 \\ &= U_2 \oplus W_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{—(2)}$$

1. (i) $(E_1 + E_2)$ ஒரு வீச்சு என்க.

பின், $(E_1 + E_2)^2 = E_1 + E_2$ (வரையறை)

$$E_1^2 + E_1 E_2 + E_2 E_1 + E_2^2 = E_1 + E_2$$
$$E_1 + E_1 E_2 + E_2 E_1 + E_2 = E_1 + E_2$$
$$\therefore \quad E_1 E_2 + E_2 E_1 = O$$

இருபக்கமும் இடதுபக்கத்தில் E_1-ஆல் பெருக்கின்,

$$E_1^2 E_2 + E_1 E_2 E_1 = E_1.O$$

மீண்டும், இருபுறமும் E_1-ஆல் வலப்பக்கமாகப் பெருக்கின்,

$$E_1 E_2 E_1 + E_2 E_1^2 = O.E_1$$

$$\therefore \quad E_1 E_2 + E_1 E_2 E_1 = O$$
$$E_1 E_2 E_1 + E_2 E_1 = O$$

$$\therefore \quad (E_1 E_2 + E_1 E_2 E_1) - (E_1 E_2 E_1 + E_2 E_1) = O$$
$$E_1 E_2 - E_2 E_1 = O$$
$$\therefore \quad E_1 E_2 = E_2 E_1.$$

(அ-து) E_1, E_2 பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டது.

$\therefore$ $(E_1 + E_2)$ ஓர் வீச்சு $\Rightarrow E_1 E_2 + E_2 E_1 = O$

மேலும் $E_1 E_2 = E_2 E_1$.

$$\therefore \quad E_1 E_2 + E_1 E_2 = O$$

(அ-து) $(1+1) E_1 E_2 = O$

$\because \quad 1+1 \neq 0,\ E_1 E_2 = O$

$\therefore \quad E_1 E_2 = E_2 E_1 = O.$

மறுதலையாக,

$E_1 E_2 = E_2 E_1 = O$ என்க.

இனி, $(E_1 + E_2)$ ஒரு வீச்சு என நிறுவுவோம்.

$E_1 E_2 = E_2 E_1 = O$ ஆதலின்,

$$\begin{aligned}(E_1 + E_2)^2 &= (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)\\ &= E_1^2 + E_1 E_2 + E_2 E_1 + E_2^2\\ &= E_1^2 + E_2^2\\ &= E_1 + E_2 \qquad (\because\ E_1^2 = E_1, E_2^2 = E_2)\end{aligned}$$

$\therefore \quad (E_1 + E_2)^2 = E_1 + E_2.$

$\therefore \quad (E_1 + E_2)$ ஓர் வீச்சாகும்.

(ii) $E = E_1 + E_2$ என்பது U-ல் V-ன் வீச்சு என்க.

பின், $U = \{z \in V : E(z) = z\}$
$W = \{z \in V : E(z) = o\}$

இனி $U = U_1 \oplus U_2$ என நிறுவுவோம்.

$z = x_1 + y_1,\ E_1(z) = x_1 \in U_1,\ (1 - E_1)(z) = y_1 \in W_1$
$z = x_2 + y_2,\ E_2(z) = x_2 \in U_2,\ (1 - E_2)(z) = y_3 \in W_2$
$z \in U$ எனின், $E(z) = z$

$\therefore \quad (E_1 + E_2) z = z \qquad (\because\ E_1 + E_2 = E)$

(அ-து) $E_1(z) + E_2(z) = z$

$$\begin{aligned}\therefore \quad z &= E_1(z) + E_2(z)\\ &= E_1(x_2 + y_2) + E_2(x_1 + y_1)\\ &= E_1(x_2) + E_1(y_2) + E_2(x_1) + E_2(y_1)\\ &= E_1[E_2(x_2)] + E_1(y_2) + E_2[E_1(x_1)] + E_2(y_1)\\ &= E_1 y_2 + E_2 y_1, \qquad \because\ E_1 E_2 = E_2 E_1 = O\end{aligned}$$

ஆனால், $E_1(E_1 y_2) = E_1^2 y_2 = E_1 y_2 \quad \therefore \quad E_1 y_2 \in U_1$
$E_2(E_2 y_1) = E_2^2 y_1 = E_2 y_1 \quad \therefore \quad E_2 y_1 \in U_2$

$\therefore \quad z = E_1 y_2 + E_2 y_1,\quad E_1 y_2 \in U_1,\ E_2 y_1 \in U_2$

(அ-து) U_1, U_2-ல் உள்ள வெக்டர்களது கூட்டல் z ஆகும்.

$\therefore \quad z \subset U_1 + U_2$

மேலும்,

$$z \in U_1 + U_2 \Rightarrow z = x + y,\ x \in U_1, y \in U_2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (E_1 + E_2) z &= (E_1 + E_2)(x + y) \\ &= E_1(x) + E_1(y) + E_2(x) + E_2(y) \\ &= x + y, \quad \because\ E_1(y) = o, E_2(x) = o \\ &= z\end{aligned}$$

(அ-து) $(E_1 + E_2) z = z$

அல்லது, $E(z) = z$

(அ-து) $U_1 + U_2 \subset U$

எனவே, $U = U_1 + U_2$.

மீண்டும், $z \in U_1 \cap U_2$ எனின், $z \in U_1, z \in U_2$

$$\therefore\ E_1(z) = z,\ E_2(z) = z$$

(அ-து) $z = E_1(z) = E_1[E_2(z)] = (E_1 E_2) z$
$= o(z) = o \quad (\because E_1 E_2 = E_2 E_1 = o)$

$$\therefore\ z = o\ \forall\ z \in U_1 \cap U_2$$

எனவே, $U_1 \cap U_2 = \{o\}$

$U = U_1 + U_2$ என முன்னர் கண்டோம்.

$$\therefore\ U = U_1 \oplus U_2$$

அடுத்ததாக, $W = W_1 \cap W_2$ என நிறுவுவோம்.

$z \in W$ எனின், $E(z) = o$

(அ-து) $(E_1 + E_2) z = o$

அல்லது, $E_1(z) + E_2(z) = o$

இருபக்கமும் E_1, E_2-ஆல் பெருக்கின்,

$$E_1^2(z) + E_1[E_2(z)] = E_1(o)$$
$$E_2[E_1(z)] + E_2^2(z) = E_2(o)$$

$$\therefore\ E_1(z) + E_1 E_2(z) = o \quad (\because E_1^2 = E_1)$$
$$E_2 E_1(z) + E_2(z) = o \quad (\because E_2^2 = E_2)$$

$$\therefore\ E_1(z) - E_2(z) = o$$

அல்லது, $E_1(z) = E_2(z) = o$

$$\therefore\ z \in W_1,\ z \in W_2$$
$$\therefore\ z \in W_1 \cap W_2$$

அதாவது, $W \subset W_1 \cap W_2$.

மீண்டும், $z \in W_1 \cap W_2$ எனின்,

$$z \in W_1, \; z \in W_2$$

$$\therefore \quad E_1(z) = o, \; E_2(z) = o$$

அல்லது, $E_1(z) + E_2(z) = o$

$$\therefore \quad (E_1 + E_2)(z) = o$$

$$\therefore \quad E(z) = o$$

எனவே, $z \in W$

$$\therefore \quad W_1 \cap W_2 \subset W$$

ஆகவே, $W = W_1 \cap W_2$.

2. (i) $(E_1 - E_2)$ ஒரு வீச்சு

$\iff I - (E_1 - E_2) = (I - E_1) + E_2$ ஒரு வீச்சு
என தேற்றம் 9–6-ல் கண்டோம்.

$E_3 = I - E_1$ என்க.

பின், $E_3 E_2 = E_2 E_3 = o$ என்றால் மட்டுமே $(E_3 + E_2)$ ஒரு வீச்சாகும்.

(அ-து) $(I - E_1) E_2 = E_2 (I - E_1) = o$

$$\therefore \quad E_2 - E_1 E_2 = E_2 - E_2 E_1 = o$$

$$\therefore \quad E_2 = E_1 E_2 = E_2 E_1$$

அதாவது, $E_2 = E_1 E_2 = E_2 E_1$ என்றால் மட்டுமே $(E_1 - E_2)$ ஒரு வீச்சாகும்.

(ii) E_1 என்பது U_1-ல் V-ன் வீச்சு.

$\therefore$ $(I - E_1)$ என்பது W_1-ல் V-ன் வீச்சாகும்.

எனவே, 1 (ii)-ன்படி,

$(I - E_1) + E_2 = I - (E_1 - E_2)$ ஒரு வீச்சாகும்.

(அ-து) $I - (E_1 - E_2)$ என்பது W' மீது U' வழி ஒரு வீச்சாகும்.

இங்கு $W' = W_1 \oplus W_2, \; U' = U_1 \cap W_2$.

எனவே, தேற்றம் 9–6-ன்படி,

$$I - [(I - E_1) + E_2] = E_1 - E_2$$

என்பது U'-ன் மீது W' வழி வீச்சாகும்.

3. $E = E_1 E_2 = E_2 E_1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{aligned}
\therefore\quad E^2 &= (E_1 E_2)(E_2 E_1) \\
&= E_1 E_2^2 E_1 \\
&= (E_1 E_2) E_1 && (\because\ E_2^2 = E_2) \\
&= (E_2 E_1) E_1 && (\because\ E_1 E_2 = E_2 E_1) \\
&= E_2 E_1^2 \\
&= E_2 E_1 && (\because\ E_1^2 = E_1) \\
&= E.
\end{aligned}$$

எனவே, E ஒரு வீச்சாகும்.

E என்பது U'' மீது W'' வழி வீச்சு (Projection on U″ along W″) எனின்,

$$U'' = \{ z \in V:\ E(z) = z \}$$
$$W'' = \{ z \in V:\ E(z) = o \}$$

இனி $U'' = U_1 \cap U_2$ என நிறுவுவோம்.

$z \in U''$ எனின், $E(z) = z$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad E_1(z) &= E_1[E(z)] && (\because\ E(z) = z) \\
&= E_1[E_1 E_2]z \\
&= E_1^2 E_2(z) \\
&= E_1 E_2(z) && (\because\ E_1^2 = E_1) \\
&= E(z) && (\because\ E_1 E_2 = E) \\
&= z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{மேலும், } E_2(z) &= E_2[E(z)] && (\because\ E(z) = z) \\
&= E_2[E_2 E_1(z)] && (\because\ E = E_2 E_1) \\
&= E_2^2 E_1(z) \\
&= E_2 E_1(z) && (\because\ E_2^2 = E_2) \\
&= E(z) && (\because\ E_2 E_1 = E) \\
&= z
\end{aligned}$$

$\therefore\quad z \in U_1,\ z \in U_2$

எனவே, $z \in U_1 \cap U_2$

மேலும் $U'' \subset U_1 \cap U_2$

மீண்டும், $z \in U_1 \cap U_2$ எனின், $z \in U_1, z \in U_2$

$\therefore\quad E_1(z) = z,\ E_2(z) = z$

$$
\begin{aligned}
\text{(அ-து)} \quad E(z) &= (E_1 E_2) z && (\because \; E = E_1 E_2)\\
&= E_1 [E_2 (z)]\\
&= E_1 (z) && (\because \; E_2 (z) = z)\\
&= z && (\because \; E_1 (z) = z)
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad z \in U''$

(அ-து) $U_1 \cap U_2 \subset U''$

$\therefore \quad U_1 \cap U_2 = U''$

(ii) $W' = W_1 + W_2$ என அடுத்து நிறுவுவோம்.

$z \in W''$ எனின், $E(z) = o$

$\therefore \quad [E_1 E_2](z) = o$

$\Rightarrow \quad E_1 (E_2) z = o \Rightarrow E_2 (z) \in W_1$

இவ்வாறே, $E_1 (z) \in W_2$

$\because \quad z = E_2 (z) + (1 - E_2)(z)$

$[E_2 (z) \in W_1, \qquad (1 - E_2)(z) \in W_2],$

$W'' \subset W_1 + W_2$

மீண்டும், $z \in W_1 + W_2$ எனின்,

$z = x + y$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad E(z) &= E(x + y)\\
&= E(x) + E(y)\\
&= (E_2 E_1)(x) + (E_1 E_2)(x) \quad (\because \; E = E_1 E_2 = E_2 E_1)\\
&= E_2 (o) + E_1 (o)\\
&= o
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad z \in W''$

அதாவது, $W_1 + W_2 \subset W''$

$\therefore \quad W'' = W_1 + W_2.$

9–10. அடுக்கு கணிப்பு (Involution)

F களத்தின் மீதமைந்த வெக்டர் வெளி $V(F)$ என்க. $V(F)$-ன் மீதமைந்த T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றம் $T^2 = I$ எனின், அது ஓர் அடுக்கு கணிப்பு (Involution) எனப்படும்.

9–11. தேற்றம்

அனைத்து அடுக்கு கணிப்புகளின் கணம் A, அனைத்து வீச்சுகளது ($V(F)$ வெக்டர் வெளி மீது) கணம் B என்க. பின் $V(F)$ வெக்டர் வெளியின் சிறப்பியல்பு 2 அல்ல. (அ-து) $1 + 1 \neq o$ எனின்,

$T = (2E - I)$ என்பது கணம் A-க்கும் கணம் B-க்கும் ஒன்றுக் கொன்றுன ஒத்தியைபு (One-one Correspondence) ஏற்படுத்தும்.

நிரூபணம்

E ஒரு வீச்சு எனின், $2E - I$ ஓர் அடுக்கு கணிப்பு என முதலில் நிறுவுவோம்.

$$\begin{aligned}(2E - I)^2 &= (2E - I)(2E - I)\\ &= 4E^2 - 2EI - I.2E + I^2\\ &= 4E^2 - 4E + I \qquad (\because \; EI = IE,\; I^2 = I)\\ &= 4E - 4E + I \qquad (\because \; E^2 = E)\\ &= o + I\\ &= I\end{aligned}$$

எனவே, $(2E - I)$ ஓர் அடுக்கு கணிப்பாகும்.

அடுத்து $T \in A$ என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $T = 2E - I$ என்ற முறையில் $E \in B$ என்ற ஒரு மூலகம் உண்டு என நிறுவு வோம்.

(அ-து) $\dfrac{T + I}{2}$ ஒரு வீச்சு என நிறுவுவோம்.

$$\begin{aligned}\left(\frac{T + I}{2}\right)^2 &= \tfrac{1}{4}(T + I)^2\\ &= \tfrac{1}{4}[T^2 + TI + IT + I^2]\\ &= \tfrac{1}{4}[I + T + T + I], \qquad (\because \; T^2 = I,\; I^2 = I\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad IT = TI = T)\\ &= \tfrac{1}{4}[2T + 2I]\\ &= \tfrac{1}{2}[T + I]\\ &= \left(\frac{T + I}{2}\right)\end{aligned}$$

(அ-து) $\left(\dfrac{T + I}{2}\right)^2 = \dfrac{T + I}{2}$

எனவே, $\dfrac{T + I}{2}$ ஒரு வீச்சாகும்.

$\therefore \; T = 2E - I$ என்ற தொடர்பு A கணம் B கணம் இவற்றுக்குள் ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியைபு ஏற்படுத்துகிறது.

9-12. வீச்சு அணி (Matrix of a projection)

E செயலியின் வீச்சு எல்லை (Range), பூச்சிய வெளி (Null space) முறையே W_1, W_2 என்க. $V = W_1 \oplus W_2$ எனவும் கொள்க.

W_1, W_2 என்பனவற்றின் அடிப்படைகள் முறையே

$B_1 = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$
$B_2 = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$ என்போம்.

W_1, W_2 ஆகியவற்றின் நேரான கூட்டல் (Direct Sum) V ஆதலின், $B = B_1 \cup B_2$ என்பது V-ன் ஓர் அடிப்படை ஆகும்,

(அ-து) $B = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \}$

என்பது V-ன் அடிப்படை.

இனி E-ன் அணியைக் காண்போம்.

$x_i \in W_1$, $i = 1, 2, \ldots, m$
$y_j \in W_2$, $j = 1, 2, \ldots, n$
$\therefore$ $Ex_i = x_i$, $Ey_j = o$

எனவே,

$$\begin{aligned}
Ex_1 &= x_1 = 1.x_1 + o + o + \ldots + o \\
Ex_2 &= x_2 = o + 1.x_2 + o + \ldots + o \\
&\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\
Ex_m &= x_m = o + o + o + \ldots + 1.x_m + \ldots + o \\
Ey_1 &= o = o + o + o + \ldots + o \\
Ey_2 &= o = o + o + o + \ldots + o \\
&\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\
&\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\
Ey_n &= o = o + o + o + \ldots + o
\end{aligned}$$

E-ன் அணி = கெழு அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} I_m & o \\ o & o \end{bmatrix}$$

I_m என்பது $m \times m$ சர்வசம அணி.

9-13. தேற்றம்

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ எனின், E_1, E_2, $\ldots$, E_n என்ற n ஒரு படிச்செயலிகள் பின் குறிப்பிட்ட முறையில் V-ல் இருக்கும்.

(i) ஒவ்வொரு E_i-ம் ஒரு வீச்சாகும். (அ-து) $E_i^2 = E_i$

(ii) $E_i E_j = 0, \ i \neq j$

(iii) $E_1 + E_2 + \ldots + E_k = I$

(iv) E_i-ன் வீச்சு எல்லை W_i.

மறுதலையாக, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ என்ற n ஒருபடிச் செயலிகள் மேற்குறிப்பிட்ட (i), (ii), (iii), (iv) நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டும் ஒவ்வொரு W_i-ம் E_i-ன் வீச்செல்லையாகவும் இருப்பின், $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ ஆகும்.

நிரூபணம்

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ என்க.

$\therefore \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ x \in V, \ x_i \in W_i$

இனி V-ல் E_j என்ற ஒரு செயலியை

$E_j x = x_j$, (x-ன் jஆவது கூறு)

என்ற முறையில் வரையறுப்போம்.

V-ன் உள்வெளி W_j, மேலும் $x_j \in W_j$. எனவே, E_j என்பது ஒரு செயலியாகும்.

மீண்டும், $x, y \in V$ எனின், $ax + by \in V$.

மேலும், $E_j x = x_j$, $E_j(y) = y_j$

$$\therefore \quad ax + by = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + b(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) + \ldots + (ax_n + by_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i), \qquad x_i, y_i \in W_i$$

$ax_i + by_i \in W_i$, [$\because$ $x_i, y_i \in W_i$, W_i ஓர் உள்வெளி]

$\therefore \quad E_j(ax + by)$

$= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i)$-ன் jஆவது கூறு (வரையறையின்படி)

$= ax_j + by_j$

$= a E_j x + b E_j y$, ($\because$ $E_j x = x_j$, $E_j y = y_j$)

(அ-து) $E_j(ax + by) = a E_j x + b E_j y$

எனவே, E_j ஒருபடிச் செயலியாகும்.

(அ-து) $E_1, E_2, \ldots, E_n$ என்ற n செயலிகளும் ஒருபடிச் செயலிகளாம்.

(i) E_j ஒரு வீச்சு

$$\begin{aligned} E_j^2 x &= E_j [E_j x] = E_j [x_j] \\ &= E_j [0 + 0 + \ldots + x_j + \ldots + 0] \\ &= j\text{ஆவது கூறு} \\ &= x_j \\ &= E_j x \end{aligned}$$

$\therefore \quad E_j^2 x = E_j x \qquad \forall x$

எனவே, $E_j^2 = E_j$

$\therefore \quad E_j$ ஒரு வீச்சாகும்.

(அ-து) $E_1, E_2, \ldots, E_n$ என்பவை வீச்சுகளாம் (Projection).

(ii) $E_i E_j = 0, \; i \neq j$

$$\begin{aligned} E_i E_j (x) &= E_i [E_j (x)] \\ &= E_i (x_j), \qquad \because E_j (x) = x_j \\ &= E_i (0 + 0 + \ldots + x_j + \ldots + 0) \\ &= i\text{ஆவது கூறு} \\ &= 0 \\ &= 0.(x) \end{aligned}$$

$\therefore \quad E_i E_j (x) = 0.(x) \qquad \forall x$

$\therefore \quad E_i E_j = 0$

(iii) $I = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$

$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

ஆனால் $E_j (x) = x_j$, $I(x) = x$

$$\begin{aligned} \therefore \quad I x &= x \\ &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &= E_1 (x) + E_2 (x) + \ldots + E_n (x) \\ &= (E_1 + E_2 + \ldots + E_n) x, \qquad \forall x \end{aligned}$$

$\therefore \quad I = E_1 + E_2 + \ldots + E_n.$

(iv) E_i-ன் வீச்செல்லை W_i

$$E_j x = x_j \in W_j$$

ஆதலின் E_j-ன் வீச்செல்லை W_j என்ற உள்வெளியாம்.

மறுதலையாக,

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ என்பவை V-மீது அமைந்த ஒருபடிச் செயலிகள். இச்செயலிகள் (i), (ii), (iii), (iv) என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டது. E_i-ன் வீச்செல்லை W_i, $\forall i$ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{இனி, } V = W_1 \oplus W_2 + \ldots \oplus W_n$$

என நாம் நிறுவுவோம்.

கட்டுப்பாடு (iii)-லிருந்து,

$$I = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$$

$$\therefore \; I(x) = (E_1 + E_2 + \ldots + E_n)\,x, \qquad \forall x \in V$$
$$= E_1 x + E_2 x + \ldots + E_n x$$

$$\therefore \; x = E_1 x + E_2 x + \ldots + E_n x$$
$$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad (\because E_i(x) = x_i)$$

$$\therefore \; V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$$

அடுத்து, $x_i = E_i y_i$ என்க.

$$\therefore \; E_j(x) = E_j(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
$$= E_j(x_1) + E_j(x_2) + \ldots + E_j(x_n)$$
$$= E_j(E_1 y_1) + E_j(E_2 y_2) + \ldots + E_j(E_n y_n)$$
$$= E_j E_j y_j \qquad (\because E_i E_j = 0,\; i \neq j)$$
$$= E_j^2 y_j$$
$$= E_j y_j \qquad (\because E_j^2 = E_j)$$
$$= x_j \qquad (\because x_i = E_i y_i)$$

இதிலிருந்து x ஒரே முறையில் விளக்கப்பட்டுள்ளது (Uniquely expressed) என்பது தெளிவு.

$$\therefore \; V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

9-14. தேற்றம்

V என்ற வெக்டர் வெளியில் T ஒருபடிச் செயலி என்க. $W_1, W_2, \ldots, W_k$ என்ற உள்வெளிகளும் $E_1, E_2, \ldots, E_k$ என்ற செயலிகளும்

(i) E_i ஒருவீச்சு, $\forall i$

(ii) $E_i E_j = 0,\; i \neq j$

(iii) $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$

(iv) E_i-ன் வீச்செல்லை W_i

என்ற முறையில் அமைந்துள்ளன என்போம். பின், W_i என்ற ஒவ்வொரு உள்வெளியும் T-ன் கீழ் மாற்றமிலியாக (Invariant under T) இருக்க அவசியமும் தேவையுமான கட்டுப்பாடு $TE_i = E_iT,\ \forall i = 1, 2, \ldots, K$.

நிரூபணம்

T-ன்கீழ் W மாற்றமிலியெனின்,

$$x \in W \Rightarrow T(x) \in W.$$

$TE_i = E_iT\ \ \forall i$ என்க.

இனி T-ன்கீழ் W_i ஒரு மாற்றமிலி (Invariant) என நிறுவுவோம்.

$x \in W_i$ என்க.

$$\therefore \quad E_i x = x$$

$$T(x) = T\,[E_i(x)]$$

$$= TE_i(x) = E_i T(x)$$

$$\because \quad x = E_i x,\ TE_i = E_i T,\ T(x) = E_i T(x)$$

$\therefore \quad T(x) \in W_i = E_i$-ன் வீச்செல்லை.

எனவே, $TE_i = E_iT$ எனின், W_i ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

மறுதலையாக,

ஒவ்வொரு W_i-ம் T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலி என்க. இனி, $TE_i = E_iT\ \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$ என நிறுவுவோம்.

$x \in V$ என்க.

$$\therefore \quad x = I(x) = (E_1 + E_2 + \ldots + E_k)\,x$$

$$= E_1x + E_2x + \ldots + E_kx$$

$$\therefore \quad Tx = TE_1x + TE_2x + \ldots + TE_kx \qquad \text{—(1)}$$

வரையறையின்படி $E_i x \in W_i$, W_i ஒரு மாற்றமிலி.

$$\therefore \quad T[E_i x] = E_i y_i \qquad \text{—(2)}$$

$$\therefore \quad Tx = E_1 y_1 + E_2 y_2 + \ldots + E_k y_k$$

எனவே,

$$E_j\ (Tx) = E_j\,[E_1 y_1 + E_2 y_2 + \ldots + E_k y_k]$$

$$= E_j E_j y_j \qquad (\because E_i E_j = 0,\ i \neq j)$$

$$= E_j^2 y_j \qquad (\because E_j^2 = E_j)$$

$$= E_j y_j$$

$$= T(E_j x) \qquad (\because \text{(2)-ன்படி})$$

$$\therefore \quad E_j(Tx) = TE_j x, \quad \forall x \in V$$

$$\therefore \quad E_j T = T E_j$$

மாதிரி-4

E_1 என்பது U_1 மீது W_1 வழி ஒரு வீச்சு, E_2 என்பது U_2 மீது W_2 வழி (Projection on U_2 along W_2) வீச்சு, $E_2 E_1 = E_1 E_2$ எனின், $E_1 + E_2 - E_1 E_2$ ஒரு வீச்சு என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$\begin{aligned}
&(E_1 + E_2 - E_1 E_2)^2 \\
&= (E_1 + E_2 - E_1 E_2)(E_1 + E_2 - E_1 E_2) \\
&= (E_1^2 + E_1 E_2 - E_1^2 E_2) + (E_2 E_1 + E_2^2 - E_2 E_1 E_2) \\
&\qquad + (-E_1 E_2 E_1 - E_1 E_2^2 + E_1 E_2 E_1 E_2) \\
&= (E_1 + E_1 E_2 - E_1 E_2) + (E_2 E_1 + E_2 - E_2 E_2 E_1) \\
&\qquad + (-E_1^2 E_2 - E_1 E_2 + E_1 E_2 E_2 E_1) \\
&= (E_1) + (E_2 E_1 + E_2 - E_2 E_1) \\
&\qquad + (-E_1 E_2 - E_1 E_2 + E_1 E_2 E_1) \\
&= (E_1) + (E_2) + (-E_1 E_2 - E_1 E_2 + E_1 E_1 E_2) \\
&= (E_1) + (E_2) - (E_1 E_2 + E_1 E_2 - E_1 E_2) \\
&= E_1 + E_2 - E_1 E_2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (E_1 + E_2 - E_1 E_2)^2 = E_1 + E_2 - E_1 E_2$$

எனவே, $(E_1 + E_2 - E_1 E_2)$ ஒரு வீச்சாகும்.

மாதிரி-5

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளிமீது T என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம்

$$T^2(I - T) = T(I - T)^2 = 0$$

என்ற முறையில் இருப்பின், T என்பது V-ன் மீது ஒரு வீச்சு என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$T^2(I - T = T(I - T)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T^2 I - T^3 = T[(I - T)(I - T)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad T^2 - T^3 = T[I^2 - IT - TI + I^2] = 0$$

$$\Rightarrow \quad T^2 - T^3 = T[I - T - T + I] = 0, \ (\because I^2 = I, IT = TI = T)$$

$$\Rightarrow \quad T^2 - T^3 = T - T^2 - T^2 + TI = 0$$

$$\therefore \quad T^2 = T^3, \quad T - T^2 - T^2 + TI = 0$$

$\therefore \quad T - T^2 = 0, \quad (\because \quad T^2 = T^3)$

$\Rightarrow \quad T^2 = T.$

எனவே, T ஒரு வீச்சாகும்.

மாதிரி–6

$V(F)$ வெக்டர் வெளி மீது T ஒருபடிச் செயலி எனின், பின் வருவன T-ன்கீழ் மாற்றமிலி என நிறுவுக.

(i) T-ன் கெர்னல் (Kernal of T)

(ii) T-ன் விம்பம் (Image of T)

(iii) $\{0\}$

நிரூபணம்

$T: \; V \rightarrow V$ ஒருபடி நிலைமாற்றம்.

(i) T–ன் கெர்னல், T–ன்கீழ் ஒரு மாற்றமிலி

$x \in$ கெர்னல் T எனின்,

$T(x) = 0, \quad x \in T$

ஆனல் T-ன் கெர்னல் $V(F)$-ன் உள்வெளி.

$\therefore$ T-ன் கெர்னல் F களத்தின் மீதமைந்த ஒரு வெக்டர் வெளி.

$\therefore \quad 0 \in$ கெர்னல் T

ஆனல், $T(x) = 0$

$\therefore \quad T(x) \in$ கெர்னல் T

$\therefore \quad x \in$ கெர்னல் $T \Rightarrow T(x) \in$ கெர்னல் T. எனவே, கெர்னல் T என்பது T-ன்கீழ் ஒரு மாற்றமிலி வெளியாகும்.

(ii) T-ன் விம்பம் T-ன்கீழ் மாற்றமிலி

T-ன் வீச்சு எல்லை (Range) $= \{T(x) : x \in V\}$

எனவே, T-ன் விம்பம் $T(x)$ வடிவில் இருக்கும், $x \in V$.

$x \in T$-ன் விம்பம் எனின்,

$x \in V$, ($\because$ T-ன் விம்பம் $\subset V$)

$\therefore \quad T(x) \in T$-ன் விம்பம் (வரையறையின்படி)

(அ-து) $T(x) \in T$-ன் விம்பம் $\forall \; x \in T$-ன் விம்பம்

$\therefore$ T-ன் விம்பம் T-ன்கீழ் ஒரு மாற்றமிலி.

(iii) $\{0\}$ என்பது T-ன்கீழ் மாற்றமிலி

$\because \quad T(0) = 0 \in \{0\}, \quad T(0) \in \{0\}$

$\therefore \quad 0 \in \{0\} \Rightarrow T(0) \in \{0\}$

எனவே, $\{0\}$ என்பது T-ன் கீழ் ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

மாதிரி–7

$f(t)$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை, $T: V \to V$ ஒருபடிச் செயலி எனின், $f(T)$-ன் கெர்னல் T-ன்கீழ் ஒரு மாற்றமிலி என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$x \in$ கெர்னல் $f(T)$ எனின், $[f(T)](x) = 0$ —(1)

$T(x) \in$ கெர்னல் $f(T)$ என நிறுவுவோம்.

$$\begin{aligned} [f(T)\,T](x) &= [\,T f(T)\,](x) && [\because f(t)\,t = t\,f(t)] \\ &= T[f(T)\,x] \\ &= T(0) && [\because f(T)\,x = 0] \\ &= 0 && (\because T \text{ ஒருபடிச் செயலி}) \end{aligned}$$

அதாவது, $[f(T)]\,T(x) = 0$, $x \in$ கெர்னல் $f(T)$

$\therefore \quad T(x) \in$ கெர்னல் $f(T)$

$\therefore \quad x \in$ கெர்னல் $f(T) \Rightarrow T(x) \in$ கெர்னல் $f(T)$

$\therefore \quad$ கெர்னல் $f(T)$ என்பது T-ன்கீழ் ஒரு மாற்றமிலி.

மாதிரி–8

$V = U \oplus W$, E_1 என்பது U-ன் மீது V-ன் வீச்சு, E_2 என்பது W-ன் மீது V-ன் வீச்சு எனின்,

(i) $E_1 + E_2 = I$

(ii) $E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$ என நிறுவுக.

நிரூபணம்

(i) $\mathbf{E_1 + E_2 = I}$

$$\begin{aligned} \therefore \quad (E_1 + E_2)\,z &= E_1(z) + E_2(z) \\ &= E_1(x+y) + E_2(x+y), && z = x + y \\ &= x + y && \because E_1(x+y) = x \\ &= z && E_2(x+y) = y \\ &= I(z) \end{aligned}$$

$\therefore (E_1 + E_2)\,z = I(z)$

எனவே, $E_1 + E_2 = I$.

(ii) $\mathbf{E_1 E_2 = 0 = E_2 E_1}$

$$\begin{aligned} E_1 E_2 &= E_1 (I - E_1) \\ &= E_1 - E_1^2 \quad (\because E_1 I = E_1) \\ &= E_1 - E_1 \quad (\because E_1^2 = E_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 E_1 &= E_2 (I - E_2) \\ &= E_2 I - E_2^2 \\ &= E_2 - E_2 \quad (\because E_2 I = E_2, \; E_2^2 = E_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

மாதிரி–9

T, E என்பவை முறையே V-ன் மீது ஒருபடி நிலைமாற்றம், ஒரு வீச்சு, $F = I - E$ எனின்,

$$T = ETE + ETF + FTE + FTF$$

என நிறுவுக.

நிரூபணம்

$$\begin{aligned} & ETE + ETF + FTE + FTF \\ &= ET(E + F) + FT(E + F) \\ &= ET[E + (I - E)] + FT[E + (I - E)] \quad (\because F = I - E) \\ &= ET[I] + FT[I] \\ &= ET + FT \\ &= (E + F)T \\ &= [E + (I - E)]T, \quad (\because F = I - E) \\ &= IT = T \end{aligned}$$

$$\therefore \; T = ETE + ETF + FTE + FTF$$

மாதிரி–10

$E_1 E_2 = E_2$, $E_2 E_1 = E_1$ என்றால் மட்டுமே E_1, E_2 என்ற வீச்சுகளது வீச்சு எல்லைகள் (Ranges) ஒன்றாக இருக்கும்.

நிரூபணம்

E_1-ன் வீச்சு எல்லை R_1 எனின், $E_1(z) \in R_1$

E_2-ன் வீச்சு எல்லை R_2 எனின், $E_2(z) \in R_2$

வீச்சு எல்லைகள் ஒன்றே என்க. (அ-து) $R_1 = R_2$.

$$\left.\begin{array}{l} E_1 E_2 = E_2 \\ E_2 E_1 = E_1 \end{array}\right\}$$ என நிறுவுவோம்.

$E_1 E_2 (z) = E_1 [E_2 (z)]$ (1)

$\because \quad E_2 (z) \in R_2, \quad R_2 = R_1, \quad E_2 (z) \in R_1$

$\therefore$ (1)-லிருந்து, $E_1 E_2 (z) = E_2 (z)$

எனவே, $E_1 E_2 = E_2$

அடுத்து, $E_2 E_1 (z) = E_2 [E_1 (z)]$ (2)

$\because \quad E_1 (z) \in R_1, \quad R_1 = R_2, \quad E_1 (z) \in R_2$

$\therefore$ (2)-லிருந்து, $E_2 E_1 (z) = E_1 (z)$

$\therefore \quad E_2 E_1 = E_1$

அடுத்தபடியாக, $E_2 E_1 = E_1$, $E_1 E_2 = E_2$ என்க.

$R_1 = R_2$ என நாம் நிறுவுவோம்.

$x \in R_1$ எனின், $E_1 (x) = x$

$\therefore \quad E_2 [E_1 (x)] = E_2 (x)$

$\therefore \quad E_1 (x) = E_2 (x)$

எனவே, $x = E_2 (x) \quad [\because \; E_1 (x) = x]$

$\Rightarrow \quad x \in R_2; \quad R_1 \subset R_2$

மீண்டும், $x \in R_2$ எனின், $E_2 (x) = x$

$\therefore \quad E_1 [E_2 (x)] = E_1 (x)$

$\Rightarrow \quad E_1 E_2 (x) = E_1 (x)$

$\Rightarrow \quad E_2 (x) = E_1 (x), \qquad (\because \; E_1 E_2 = E_2)$

$\Rightarrow \quad x = E_1 (x), \qquad (\because \; E_2 (x) = x)$

$\therefore \quad x \in R_1$

$\because \quad x \in R_2 \Rightarrow x \in R_1, \quad R_2 \subset R_1$

$\therefore \quad R_1 = R_2$

பயிற்சி – 9

1. $V = W_1 \oplus W_2$, E என்பது U-ன் மீது V-ன் வீச்சு எனின், விம்பம் $E = W_1$, கெர்னல் $E = W_2$ என நிறுவுக.

2. E என்பது U-ன் மீது V-ன் வீச்செனின், aE என்பதும் ஒரு வீச்சு என நிறுவுக. $a \neq 0 \in F$.

3. $V_2(R)$ என்ற வெக்டர் வெளி மீது T என்ற ஒருபடி நிலை மாற்றத்தின் திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்த அணி $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனின், $\{0\}$ என்பது T-ன்கீழ் ஒரு மாற்றமிலி என நிறுவுக.

4. $V_2(R)$-ன் மீதமைந்த T என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் திட்டமான அடிப்படையைச் சார்ந்த அணி $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ எனின், ஒரு-பரிமாண மாற்றமிலி உள்வெளியை T கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

5. $EF = E$, $EF = F$ என்றால் மட்டுமே E, F என்ற இரு வீச்சுகளது பூச்சிய வெளிகள் ஒன்றாக இருக்கும் என நிறுவுக.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(BIBLIOGRAPHY)

1. An Introduction to Abstract Algebra : F. M. Hall
2. An Introduction to Modern Algebra : N. H. Mc Coy
3. A Modern Introduction to Algebra : J. L. Kelley
4. Linear Algebra : Stewart
5. Linear Algebra and Matrix Theory : Evan. D. Nering
6. Linear Algebra : Hoffman and Kunze
7. Linear Algebra : Mirsky
8. Topics in Algebra : I. N. Herstein
9. Lectures on Abstract Algebra Vol. I : N. Jacobson
10. Lectures on Linear Algebra Vol. I : N. Jacobson
11. Modern Algebra Vols. I & II : Vander Warden
12. A Text Book of Matrices : Shantinarayan
13. A Text Book of Modern Algebra : Shantinarayan
14. A Text Book of Linear Algebra : S. N. Goel
15. Modern Algebra : K. Sivasubramanian

கலைச்சொற்கள்

A

Addition — கூட்டல்
Adjoint matrix — சேர்ப்பு அணி
Annihilator — பூச்சியமாக்கி
Associative Law — சேர்ப்பு விதி
Augmented matrix — மிகுதிப்படுத்திய அணி

B

Basis — அடிப்படை
Binary composition — இணைச்சேர்க்கை

C

Coefficient — கெழு
Cofactor — இணைக்காரணி
Combination — சேர்மானம்
Commutative — பரிமாற்று
Complement — நிரப்பி
Complementary — நிரப்பும்
Complex — சிக்கலெண்
Conjugate — இணையிய
Consistent — பொருத்தமுடைய
Constant — மாறிலி, நிலையெண்
Co-ordinates — கூறுகள்

D

Definition — வரையறை
Dependant — சார்ந்த

Determinant — அணிக்கோவை
Diagonal — மூலைவிட்டம்
Distributive Law — பங்கீட்டு விதி
Dual space — துணைவெளி

E

Eigen vector — ஐகன் வெக்டர்
Element — மூலகம், உறுப்பு
Equal — சமன், சமம்
Equation — சமன்பாடு
Equivalent — சமானமான
Exercise — பயிற்சி

F

Field — களம்
Finite — முடிவுள்ள
Function — சார்பு

G

Generator — பிறப்பாக்கி
Group — குலம்

H

Hermitian matrix — ஹெர்மிசியன் அணி
Homogeneous equation — சமபடித்தான சமன்பாடு

I

Idem factor — மாற்றக் காரணி
Identical — சர்வசமமான
Identity — சர்வசமம்
Image — விம்பம்
Inconsistent — பொருத்தமற்ற
Independant — சார்பற்ற
Inductive method — தொகுத்தறி முறை
Inequality — சமனின்மை
Infinite — முடிவில்லாத
Inner product — உட்பெருக்கு

Invariance — மாற்றமின்மை
Invariant — மாற்றமிலா
Inverse — நேர்மாறுன
Isomorphism — ஒற்றுருவ மாற்றம்

K

Kernal — கெர்னல்.

L

Left identity — இடது சர்வசம மூலகம்
Left inverse — இடது நேர்மாறு மூலகம்
Lemma — துணைக் கோட்பாடு
Linear Algebra — ஒருபடி இயல்முறைக் கணிதம்
,, basis — ஒருபடி அடிப்படை
,, dependance — ஒருபடிச் சார்புள்ள நிலை
,, equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
,, function — ஒருபடிச் சார்பு
,, Independance — ஒருபடிச் சார்பற்ற நிலை
,, space — ஒருபடி வெளி
,, sum — ஒருபடிக் கூட்டல்
,, transformation ஒருபடி நிலைமாற்றம்
Lower triangular matrix — கீழ் முக்கோண அணி

M

Mapping — உருமாற்றம்
Matrix — அணி
,, column — நிரல் அணி
,, non-singular — பூச்சியமில் கோவை அணி
,, null — பூச்சிய அணி
,, order of — அணித்தரம்
,, orthogonal — செங்குத்தணி
,, rank of — அணி அளவை
,, row — நிரை அணி
,, scalar — மூலைவரை அணி
,, skew symmetric — எதிர்ச் சீரணி
,, square — சதுர அணி
,, symmetric — சமச்சீர் அணி
,, transpose — நிரை, நிரல் மாற்று அணி

Matrix unit	—	அணி அலகு
Multiple	—	மடங்கு
Multiplication	—	பெருக்கல்

N

Nil potent	—	பூச்சிய ஆற்றல்
Non-singular linear transformation	—	ஒருமையற்ற ஒருபடி நிலை மாற்றம்
Nullity	—	பூச்சியப் பரிமாணம்
Null space	—	பூச்சிய வெளி

O

Operator	—	செயலி
Ordered pair	—	வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடி
Orthogonal dimension	—	செங்குத்துப் பரிமாணம்
Orthogonal vector	—	செங்குத்து வெக்டர்
Orthonormal basis	—	அலகு செங்குத்து அடிப்படை

P

Polynomial	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
Position vector	—	நிலை வெக்டர்
Pre-image	—	மூல விம்பம்
Prime number	—	பகாவெண்

Q

Quotient	—	ஈவு
,, field	—	ஈவுக் களம்
,, space	—	ஈவு வெளி

R

Range	—	வீச்செல்லை
Relation	—	தொடர்பு
Row	—	நிரை

S

Scalar	—	திசையிலி
Set	—	கணம்

Similar — வடிவொத்த
Singular matrix — ஒருமையுள்ள அணி
Sub-group — உட்குலம்
Sub-matrix — கீழணி
Subset — உட்கணம்

T

Triangle inequality — முக்கோணச் சமனின்மை
Trivial — அற்பமான

U

Unique — ஒரே முறை
Unit vector — அலகு வெக்டர்
Upper triangular matrix — மேல் முக்கோண அணி

V

Value — மதிப்பு
Variable — மாறி
Vector — திசையி

W

Well defined set — நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட கணம்

Z

Zero — பூச்சியம்
Zero functional — பூச்சியச் சார்பு